

تحليل و طراحی سیستم ها روش های تصمیم گیری چند معیاره

دکتر مهدی روانشادنيا

فهرست

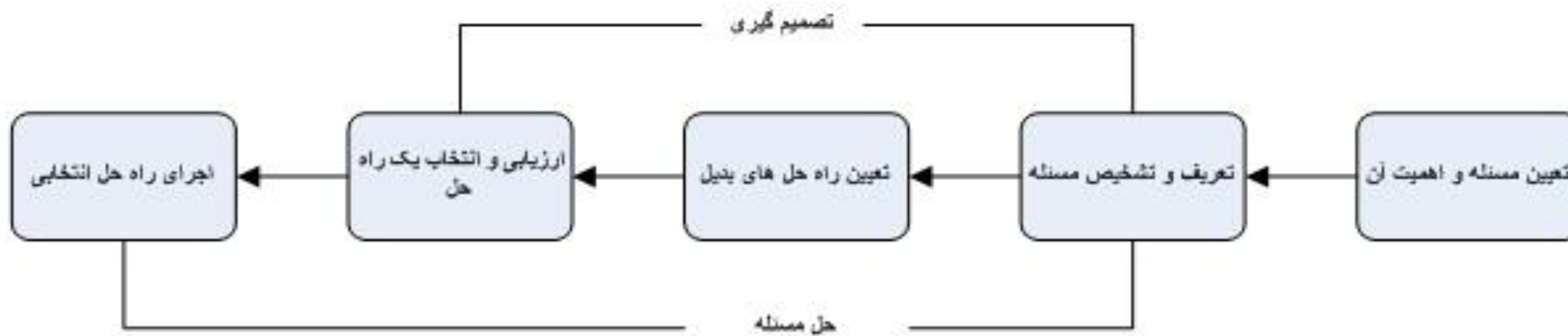
- تصمیم گیری و تصمیم بهینه
- روش های تصمیم گیری چند معیاره
- طبقه بندی انواع روشهای تصمیم گیری چند معیاره
- اصول تصمیم گیری چند شاخصه
- تحلیل سلسله مراتبی AHP
- ANP
- TOPSIS
- سایر روشهای تصمیم گیری چند شاخصه
- تصمیم گیری چند معیاره گروهی
- ترکیب روشهای تصمیم گیری چند معیاره
- تصمیم گیری چند معیاره فازی

تصمیم گیری و تصمیم بهینه

تصمیم‌گیری

- تصمیم‌گیری عبارت است از انتخاب یک گزینه (راه کار، استراتژی، ...) از بین گزینه‌های موجود.
- مثال: (در هنگام خرید خانه یا ماشین، انتخاب شغل، سرمایه‌گذاری و ...)
- اهمیت تصمیم‌گیری صحیح: بعضی از صاحب‌نظران مدیریت تصمیم‌گیری و مدیریت را یکی و هم‌معنی دانسته‌اند.
- همچنین تصمیم‌گیری بخش اساسی فرایند حل مساله در مدیریت است.

فرایند حل مساله

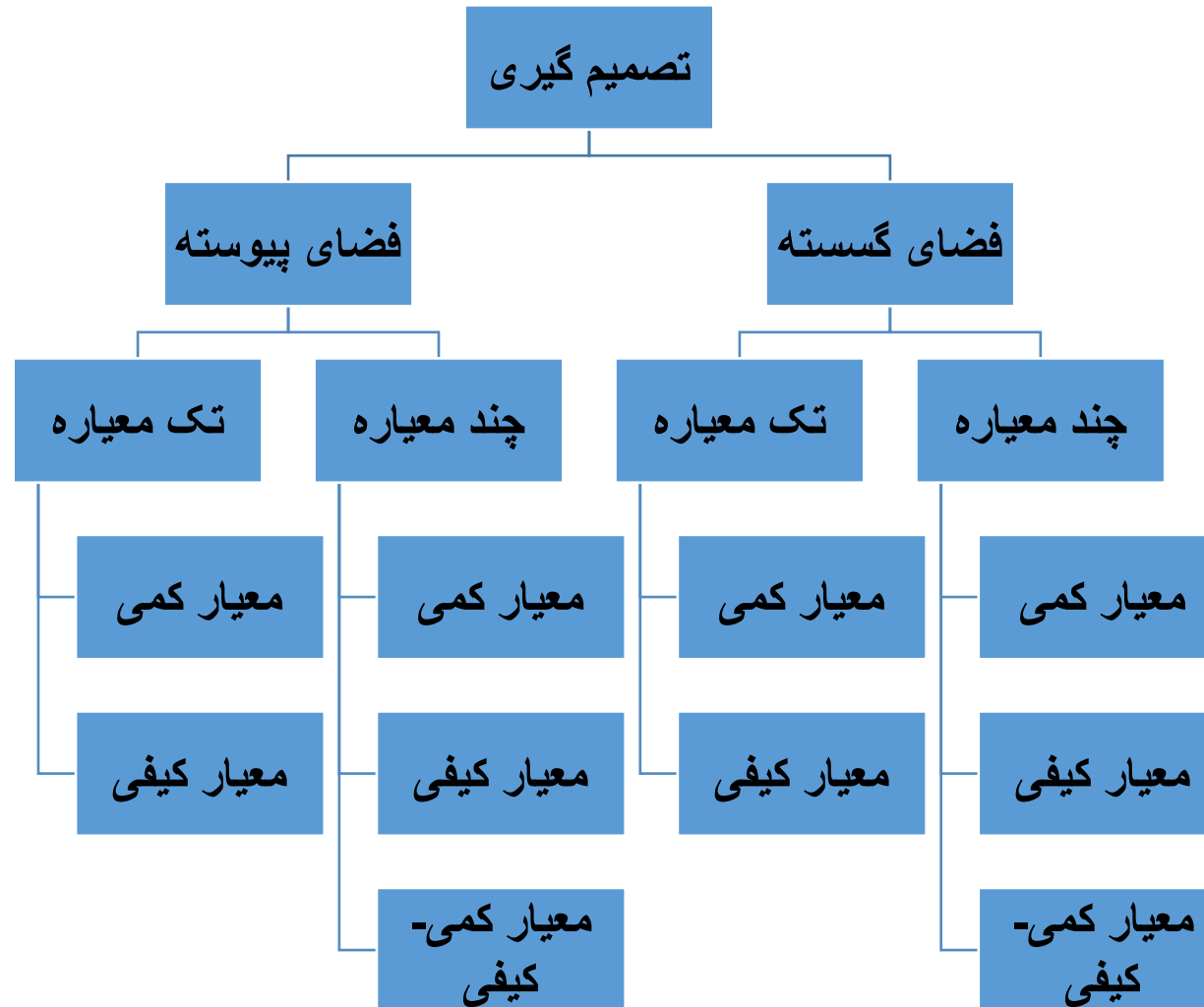


تصمیم‌گیری چند معیاره

- در مسائل بهینه‌سازی، یک معیار (معمولاً سود) برای بهینه‌سازی تصمیم در نظر گرفته می‌شود.
- در بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری، چندین معیار برای اتخاذ تصمیم مناسب در نظر گرفته می‌شوند. (در مورد خرید یک ماشین معیارهایی مانند: قیمت، قابلیت اطمینان، ایمنی، مصرف انرژی و ... در نظر گرفته می‌شود)
- این معیارها گاه متضاد هستند، یعنی بهینه‌سازی یکی موجب بهینه‌بودن مابقی معیارها نمی‌شود.
- در این شرایط با مساله تصمیم‌گیری چند معیاره مواجه هستیم.

روش های تصمیم گیری چند معیاره

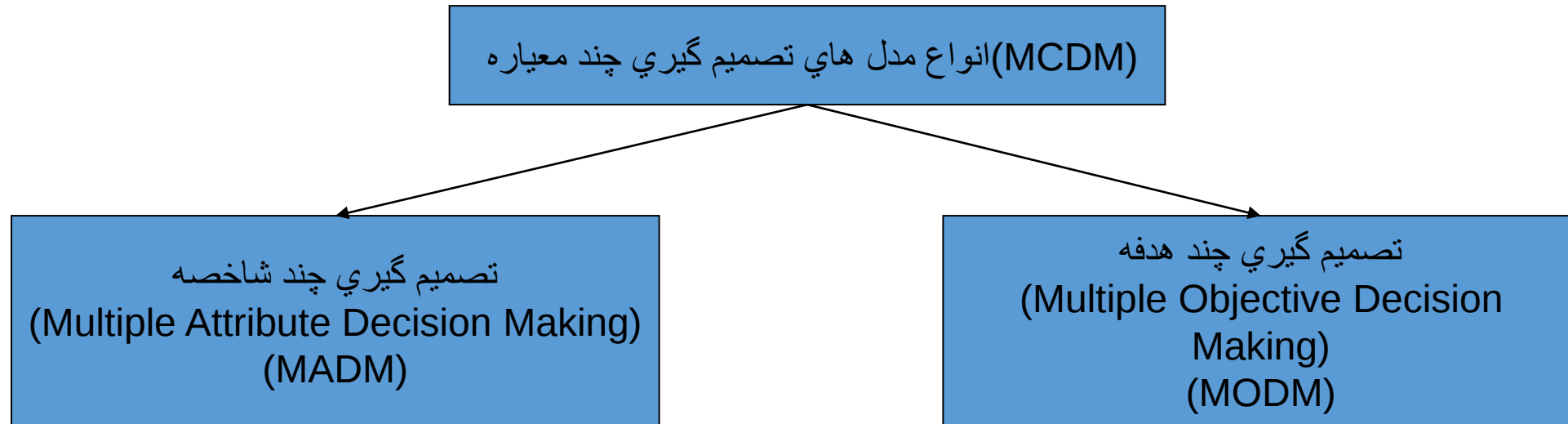
انواع حالت های تصمیم گیری



انواع تصمیم گیری چند معیاره

- یکی از تکنیک های تصمیم گیری با استفاده از داده های کمی تصمیم گیری چندمعیاره می باشد. مدیر با استفاده از تکنیک های تصمیم گیری چندمعیاره می تواند با در نظر گرفتن معیارهای متفاوت برای تصمیم گیری که گاهی با یکدیگر در تعارض هستند، به طریقی عقلایی تصمیم سازی نماید .
تصمیم گیری چندمعیاره (MCDM) به دو دسته تصمیم گیری چندشاخصه (MADM) و تصمیم گیری چند هدفه (MODM) تقسیم می شود.
مدل ها و تکنیک های تصمیم گیری چند شاخصه به منظور انتخاب مناسب ترین گزینه از بین m گزینه موجود به کار می روند. در (MADM) معمولا داده های مربوط به گزینه ها از منظر شاخص های مختلف در یک ماتریس نمایش داده می شود.

تصمیم‌گیری چند معیاره



$$D = \begin{array}{c|cccc} & X_1 & X_2 & X_j & X_n \\ \hline A_1 & a_{11} & & & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & & & a_{2n} \\ & | & & & | \\ & \dots & & & \dots \\ A_i & a_{i1} & & a_{ij} & a_{in} \\ & | & & & | \\ & \dots & & & \dots \\ A_m & a_{m1} & & & a_{mn} \end{array}$$

$$\text{Max}(\text{Min}) \quad f(x) = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$$

s.t:

$$g_i(x) \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

انواع مدل های تصمیم گیری چند شاخصه

● مدل های جبرانی

SAW

ELECTRE

TOPSIS

LINMAP

AHP

● مدل های غیر جبرانی

ماکسی ماکس

ماکسی مین

هارویکنز

تسلط

لکسیکوگراف

مدلهای جبرانی تصمیم گیری چند شاخصه

• مدل هایی که از شاخص هایی تشکیل شده اند که با یکدیگر در تعامل اند، به این معنی که مقادیر نامطلوب یک شاخص می تواند توسط مقادیر مطلوب شاخص دیگر پوشانده شود. از جمله مدل های جبرانی به موارد زیر می توان اشاره کرد:

- AHP
- ANP
- VIKOR
- SAW
- TOPSIS
- ELECTRE
- PROMETHEE
- SMART
- REGIME
- SIR
- EVAMIX

مدل های غیر جبرانی

- در این مدل تعامل و مبادله میان شاخص ها مجاز نیست یعنی به طور مثال نقطه ضعف موجود در یک شاخص ها توسط مزیت موجود در یک شاخص دیگر جبران نمی شود. مطلوبیت این مدل ها زمانی روشن می شود که تحلیلگر با محدود بودن اطلاعات مواجه و یا دسترسی به تصمیم گیرندگان محدود باشد.
از جمله روش های غیر جبرانی می توان به روش
- تسلط
- روش حذف
- روش لکسیکوگراف
- روش رضایت بخش شمول
- روش رضایت بخش خاص
- روش Max-Min
- روش Min-Min

روشهای تصمیم گیری چند شاخصه ترکیبی

- سیستم های فازی تصمیم گیری چند معیاره
- روش های کلاسیک بهینه سازی چندهدفه
- روش های گروهی تصمیم گیری چند معیاره

- Choquet integral-based TOPSIS
- fuzzy DEMATEL
- Cloud Delphi hierarchical analysis
- Group MADM

اصول تصمیم گیری چند شاخصه

تصميم گيرى چندشاخصه

در اين مسائل، تعدادى گزينه (راه كار، استراتژى،...) با توجه به معيارهاى، مورد تجزيه و تحليل قرار گرفته و در مورد آنها يك نوع اولويت بندى انجام مى شود.

شاخص هاي مثبت و منفي با ابعاد متفاوت

	درآمد	وجهه اجتماعي	سختي	مسافت	امنيت
A1	15	زياد	نسبتاً زياد	10	زياد
A2	12	متوسط	متوسط	3	خيلي زياد
A3	20	خيلي زياد	زياد	30	متوسط
A4	30	كم	خيلي زياد	1	كم

شاخص هاي غير كمّي روانشناختي

تصمیم گیری چند شاخصه

- مراحل تحلیل ماتریس تصمیم گیری:
- کمی کردن شاخص های غیر کمی
- بی مقیاس کردن ماتریس
- مشخص کردن وزن معیارها
- اولویت بندی گزینه ها (بوسیله مدل های MADM)

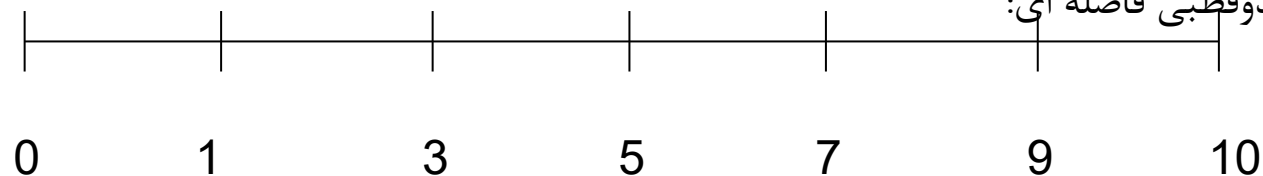
کمی کردن شاخص های غیر کمی

شاخص های کمی (قیمت، درآمد، مسافت، و ...)،
شاخص های کیفی (وجهه ی اجتماعی، سختی، امنیت، زیبایی، و ...).

مقیاس های مختلفی را می توان مورد استفاده قرار داد:

۱- ترتیبی (اول، دوم، ... یا ۱، ۲، ...)

۲- دوقطبی فاصله ای:



برای شاخص های مثبت: ۱= خیلی کم، ۳= کم، ۵= متوسط، ۷= زیاد، ۹= خیلی زیاد

برای شاخص های منفی: ۱= خیلی زیاد، ۳= زیاد، ۵= متوسط، ۷= کم، ۹= خیلی کم

مفروضات:

• فاصله بین خیلی کم و کم و کم و فاصله بین زیاد و خیلی زیاد یکی است

• امتیاز ۹ سه برابر ۳ است

تصمیم گیری چند معیاره - دکتر مهدی روانشادنی

• ترکیب ارزش ها، برای شاخص های مختلف مجاز است.

کمی کردن شاخص های غیر کمی

امنیت (شاخص مثبت)	مسافت	سختی (شاخص منفی)	وجهه اجتماعی (شاخص مثبت)	درآمد	
زیاد(7)	10	نسبتاً زیاد(2)	زیاد(7)	15	A1
خیلی زیاد(9)	3	متوسط(5)	متوسط(5)	12	A2
متوسط(5)	30	زیاد(3)	خیلی زیاد(9)	20	A3
کم(3)	1	خیلی زیاد(1)	کم(3)	30	A4

بی مقیاس کردن ماتریس تصمیم گیری

- شاخص های ماتریس دارای ابعاد مختلف هستند (ریال، کیلومتر و...) و بعضی مثبت (مانند درآمد) و بعضی منفی (مانند فاصله) هستند.
- مقایسه و یا ترکیب شاخص ها در این شرایط دشوار و یا نشدنی است.
- لازم است شاخص ها بی مقیاس شوند (همگی در یک فاصله قرار گیرند و جنبه مثبت پیدا کنند).
- روش های متفاوتی برای بی مقیاس کردن وجود دارد:
 - بی مقیاس کردن با استفاده از نرم
 - بی مقیاس کردن خطی
 - بی مقیاس کردن فازی

بی مقیاس کردن با استفاده از نورم

- در این روش هر عدد در هر ستون به نورم اعداد همان ستون تقسیم می شود.
- شاخص های مثبت و منفی تبدیل نمی شوند. (مثبت ها مثبت و منفی ها منفی باقی می مانند).

شاخص های کیفی بعد از کمی شدن همگی مثبت می شوند

$$n_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_i a_{ij}^2}}$$

	امنیت (+)	مسافت (-)	سختی (+)	وجهه اجتماعی (+)	درآمد (+)
A1	0.546608	0.314658	0.320256	0.546608	0.367167
A2	0.702782	0.094398	0.800641	0.390434	0.293733
A3	0.390434	0.943975	0.480384	0.702782	0.489555
A4	0.234261	0.031466	0.160128	0.234261	0.734333

بی مقیاس سازی خطی

در این روش شاخص های مثبت با استفاده از رابطه (۱) و شاخص های منفی با استفاده از رابطه (۲) بی مقیاس می شوند. اگر تمام شاخص ها منفی باشند می توان از رابطه (۳) نیز برای بی مقیاس کردن شاخص ها استفاده نمود.

$$n_{ij} = \frac{a_{ij}}{\underset{i}{\text{Max}}(a_{ij})} \quad (1)$$

$$n_{ij} = \frac{\underset{i}{\text{Min}}(a_{ij})}{a_{ij}} \quad (2)$$

$$n_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{\underset{i}{\text{Max}}(a_{ij})} \quad (3)$$

بی مقیاس سازی خطی

در این روش تمامی شاخص ها مثبت شده و بهترین گزینه در هر شاخص مقدار یک می گیرد

	امنیت	مسافت	سختی	وجهه اجتماعي	درآمد
A1	0.777778	0.1	0.4	0.777778	0.5
A2	1	0.333333	1	0.555556	0.4
A3	0.555556	0.033333	0.6	1	0.666667
A4	0.333333	1	0.2	0.333333	1

بی مقیاس سازی فازی

در این روش بدترین گزینه در هر شاخص مقدار صفر و بهترین گزینه مقدار یک می گیرد:
شاخص های مثبت با استفاده از رابطه (۱) و شاخص های منفی با استفاده از رابطه (۲) بی مقیاس می شوند.

$$n_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^{Min}}{a_j^{Max} - a_j^{Min}} \quad (1)$$

$$n_{ij} = \frac{a_j^{Max} - a_{ij}}{a_j^{Max} - a_j^{Min}} \quad (2)$$

ارزیابی اوزان شاخص ها

- آگاهی از اهمیت نسبی شاخص ها و معیارهای تصمیم گیری، فرایند تصمیم گیری و اولویت بندی گزینه ها را ساده می سازد.
- اهمیت نسبی شاخص ها، با مشخص کردن وزن نسبی آن ها (نسبت به منظور اصلی تصمیم گیری)، بدست می آید.
- روش های مختلفی برای تعیین وزن شاخص ها وجود دارد:
 - روش آنترופی
 - روش مقایسه زوجی
 - روش LINMAP

AHP

فرایند تحلیل سلسله مراتبی

پیشگفتار

یکی از کارآمدترین تکنیک‌های تصمیم‌گیری فرایند تحلیل سلسله‌مراتبی (Analytical Hierarchy process-AHP) که اولین بار توسط توماس ال ساعتی در 1980 مطرح شد. که بر اساس مقایسه‌های زوجی بنا نهاده شده و امکان بررسی سناریوهای مختلف را به مدیران می‌دهد.

اصول فرایند تحلیل سلسله مراتبی

اصل ۱. شرط معکوسی (Reciprocal Condition)

اصل ۲. همگنی (Homogeneity)

اصل ۳. وابستگی (Dependency)

اصل ۴. انتظارات (Expectation)

شرط معکوسی

اگر ترجیح عنصر A بر عنصر B برابر n باشد ترجیح عنصر B بر عنصر A برابر $1/n$ خواهد بود.

همگنی

عنصر A با عنصر B باید همگن و قابل قیاس باشند . به بیان دیگر برتری عنصر A بر عنصر B نمی تواند بی نهایت یا صفر باشد.

وابستگی

هر عنصر سلسله مراتبی به عنصر سطح بالاتر خود می تواند وابسته باشد و به صورت خطی این وابستگی تا بالاترین سطح می تواند ادامه داشته باشد.

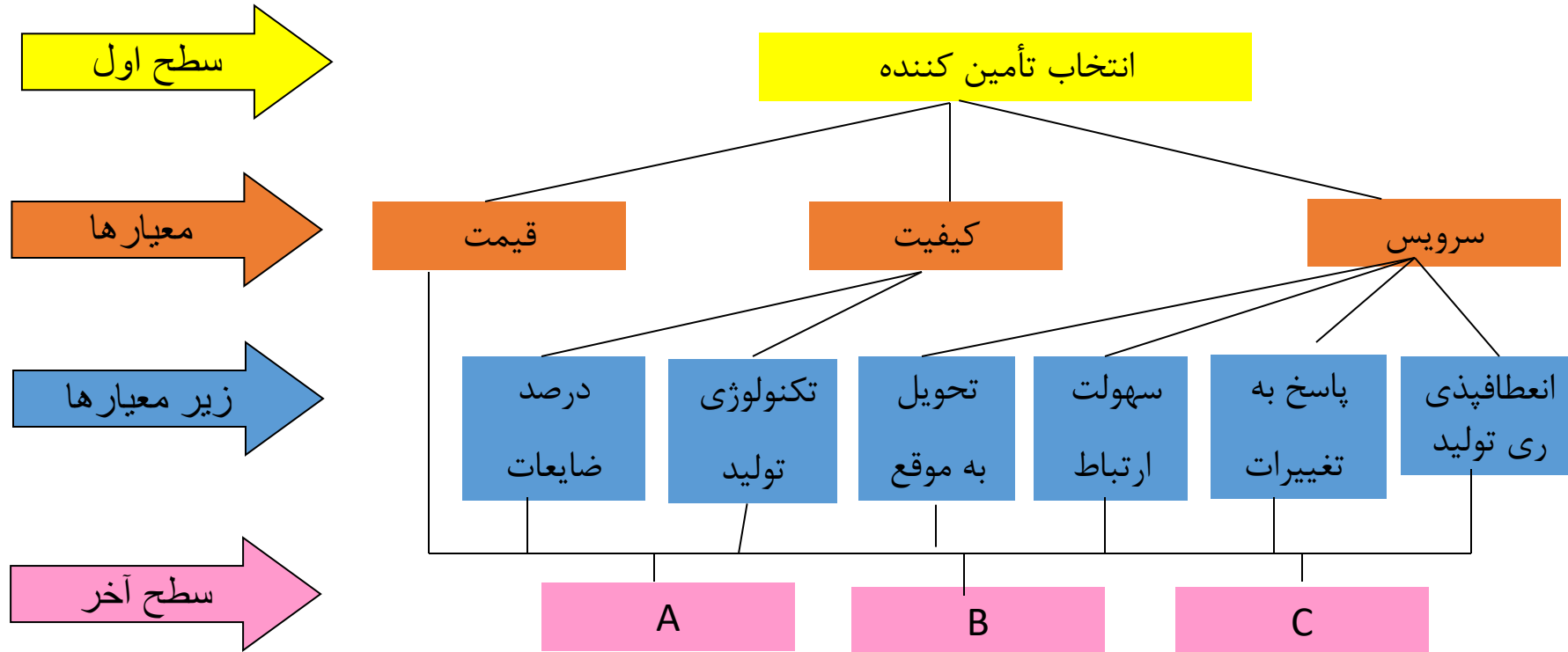
انتظارات

هر گاه تغییر در ساختمان سلسله مراتبی رخ دهد پروسه ارزیابی باید مجدداً انجام گیرد.

فرایند تحلیل سلسله مراتبی در یک نگاه

- ساخت سلسله مراتبی
- مقایسه های زوجی
- ترکیب وزن‌ها
- تحلیل حساسیت
- روش رتبه بندی

ساخت سلسله مراتبی - مثال انتخاب تأمین کننده



مثال

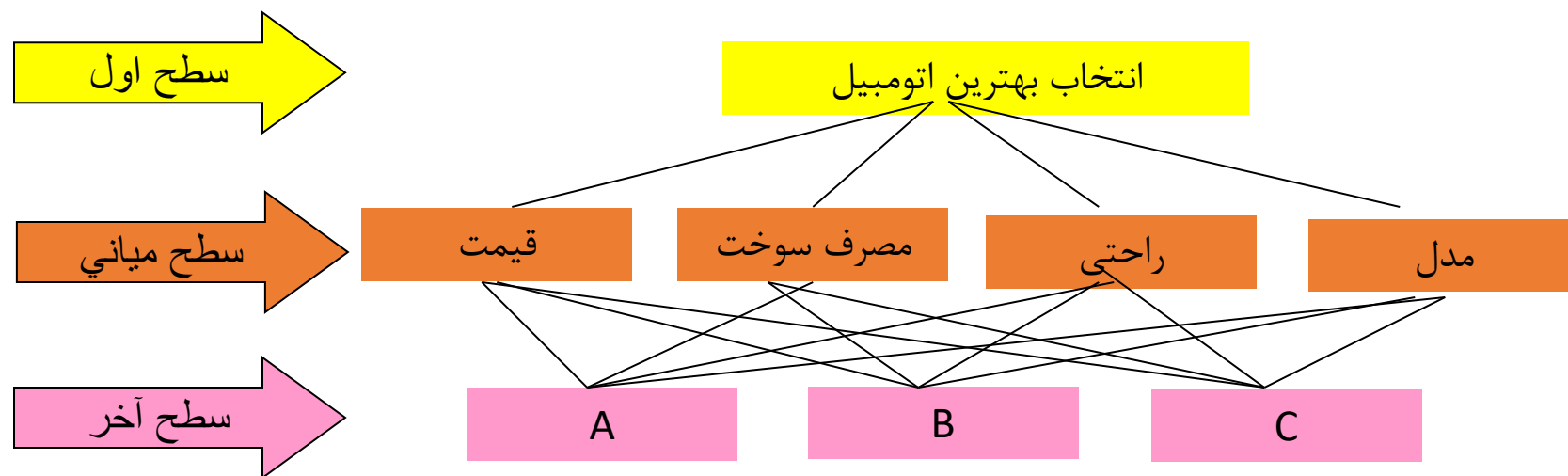
تصور کنید که از بین سه اتومبیل A,B,C یکی را انتخاب کنیم چهار معیار: راحتی ، قیمت ، مصرف سوخت، مدل مطرح می باشد. حل این مثال را طی قدمهای زیر تشریح می کنیم:

ساختن سلسله مراتبی

محاسبه وزن

سازگاری سیستم

ساخت سلسله مراتبی - انتخاب بهترین اتومبیل



محاسبه وزن

مقدار عددی	ترجیحات (قضاوت شفاهی)	
۹	Extremely preferred	کاملاً مرجح یا کاملاً مهم تر یا کاملاً مطلوب تر
۷	Very strongly preferred	ترجیح با اهمیت یا مطلوبیت خیلی قوی
۵	Strongly preferred	ترجیح با اهمیت یا مطلوبیت قوی
۳	Moderately preferred	کمی مرجح یا کمی مهم تر یا کمی مطلوب تر
۱	Equally preferred	ترجیح یا اهمیت یا مطلوبیت یکسان
۸،۶،۴،۲		ترجیحات بین فواصل قوی

محاسبه وزن نسبی اتمبیل ها از نظر راحتی

	اتمبیل A	اتمبیل B	اتمبیل C
اتمبیل A	1	2	8
اتمبیل B	$\frac{1}{2}$	1	6
اتمبیل C	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	1

قدم اول: مقادیر هر یک از ستون ها را با هم جمع می کنیم.

	اتومبیل A	اتومبیل B	اتومبیل C
اتومبیل A	1	2	8
اتومبیل B	1/2	1	6
اتومبیل C	1/8	1/6	1
جمع هر ستون	13/8	19/6	15

قدم دوم: تقسیم هر عنصر از ماتریس به جمع کل ستون همان عنصر
(نرمالایز کردن)

	اتومبیل A	اتومبیل B	اتومبیل C
اتومبیل A	8/13	12/19	8/15
اتومبیل B	4/13	6/19	6/15
اتومبیل C	1/13	1/19	1/15

قدم سوم : محاسبه متوسط عناصر در هر سطر

	اتومبیل A	اتومبیل B	اتومبیل C	متوسط سطر
اتومبیل A	0.615	0.631	0.533	0.593
اتومبیل B	0.308	0.316	0.400	0.341
اتومبیل C	0.077	0.053	0.067	0.066
جمع کل	1	1	1	1

ماتریس مقایسه زوجی برای سه اتمبیل نسبت به قیمت

	اتمبیل A	اتمبیل B	اتمبیل C
اتمبیل A	1	1/3	1/4
اتمبیل B	3	1	1/2
اتمبیل C	4	2	1

ماتریس مقایسه زوجی برای سه اتومبیل نسبت به مصرف

	اتومبیل A	اتومبیل B	اتومبیل C
اتومبیل A	1	$1/4$	$1/6$
اتومبیل B	4	1	$1/3$
اتومبیل C	6	3	1

ماتریس مقایسه زوجی برای سه اتمبیل نسبت به مدل

	اتمبیل A	اتمبیل B	اتمبیل C
اتمبیل A	1	4	4
اتمبیل B	3	1	7
اتمبیل C	1/4	1/7	1

وزن اتومبیل ها برای معیار های قیمت، مصرف، مدل

مدل	مصرف	قیمت	
0.265	0.087	0.123	اتومبیل A
0.655	0.274	0.320	اتومبیل B
0.080	0.639	0.557	اتومبیل C

ماتریس مقایسه زوجی معیارها

	مدل	راحتی	مصرف	قیمت
قیمت	2	2	3	1
مصرف	1/4	1/4	1	1/3
راحتی	1/2	1	4	1/2
مدل	1	2	4	1/2

وزن هر یک از معیارها

0.398 قیمت

0.085 مصرف

0.218 راحتی

0.299 مدل

وزن اتومبیل ها نسبت به معیارها

	مدل	راحتی	مصرف	قیمت
A اتومبیل	0.265	0.593	0.087	0.123
B اتومبیل	0.655	0.341	0.274	0.320
C اتومبیل	0.080	0.066	0.639	0.557

محاسبه وزن نهائی اتومبیل

وزن نهائی اتومبیل A

$$0.398*0.123+0.085*0.087+0.218*0.593+0.299*0.265=0.265$$

وزن نهائی اتومبیل B

$$0.398*0.320+0.085*0.274+0.218*0.341+0.299*0.655=0.421$$

وزن نهائی اتومبیل C

$$0.398*0.557+0.085*0.639+0.218*0.066+0.299*0.080=0.314$$

اولویت نهائی اتومبیل ها

اولویت	اتومبیل	وزن
1	B	0.431
2	C	0.314
3	A	0.265

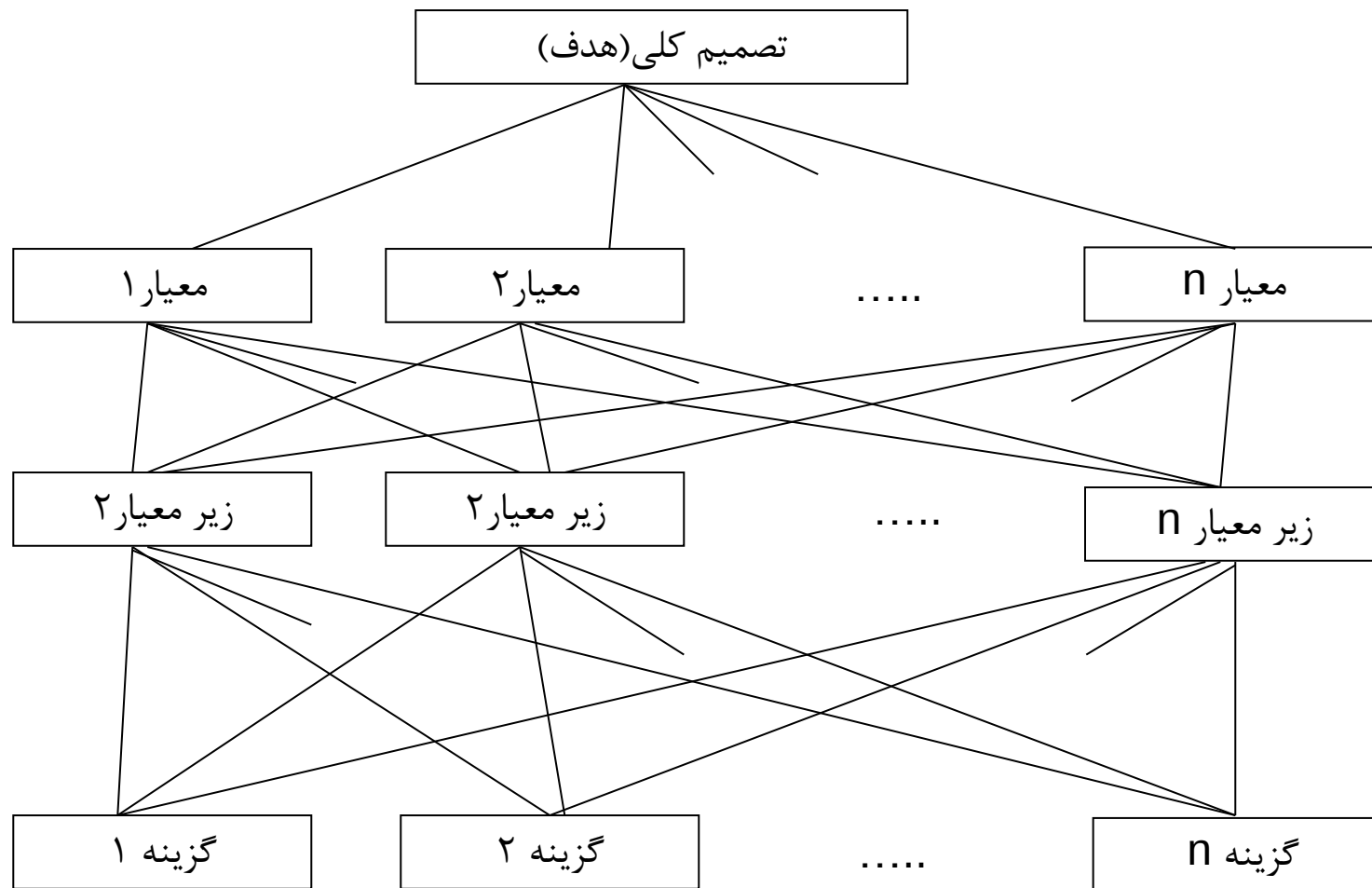
ساختن سلسله مراتبی

سلسله مراتبی یک نمایش گرافیکی از مساله پیچیده واقعی می باشد که در راس آن هدف کلی مساله و در سطوح بعدی معیار ها و گزینه ها قرار دارند ، هر چند یک قاعده ثابت و قطعی برای رسم سلسله مراتبی وجود ندارد . سلسله مراتبی ممکن است به یکی از صورت های زیر باشد :

هدف _ معیارها _ زیر معیارها _ گزینه ها

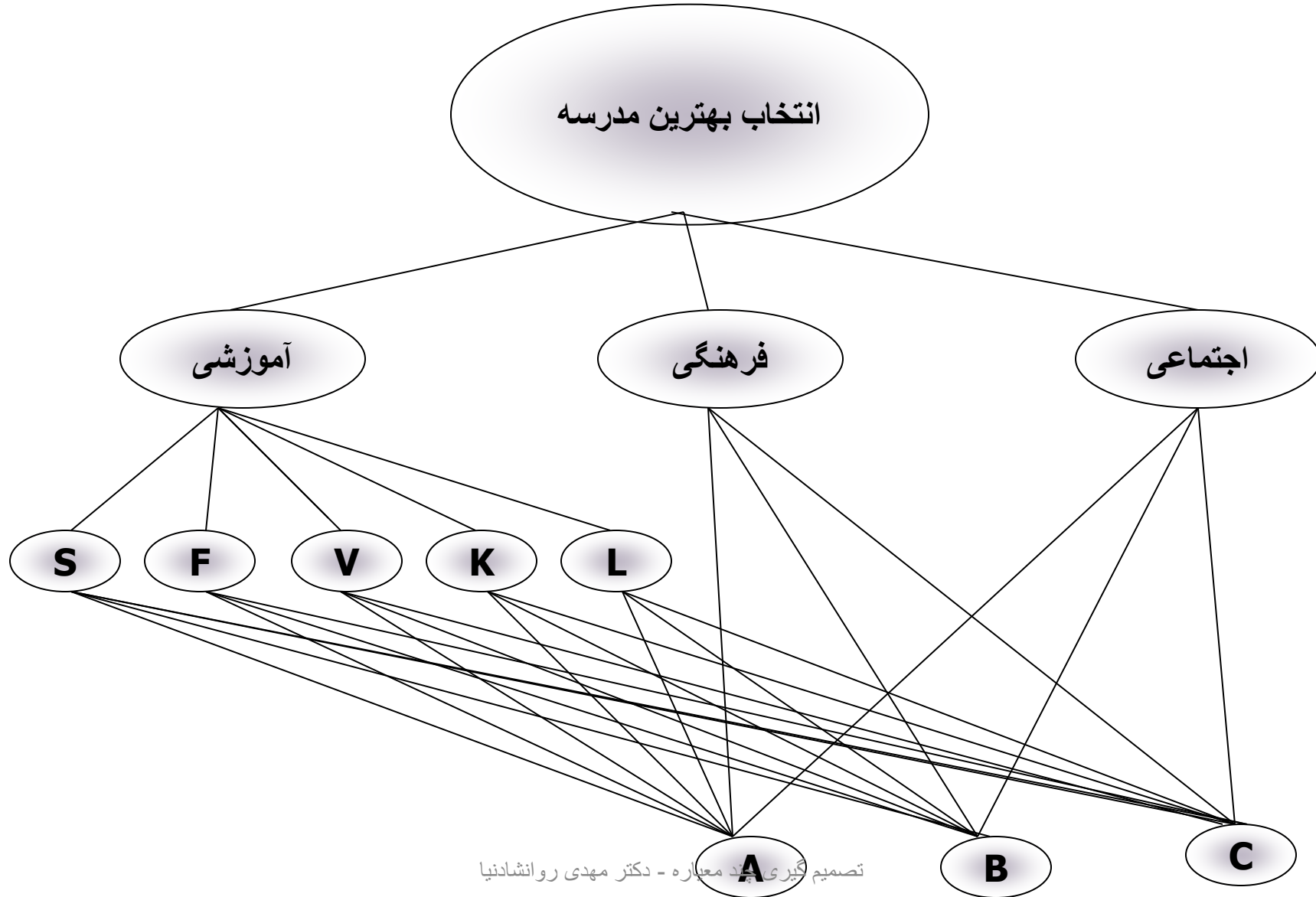
هدف _ معیارها _ عوامل _ زیر عوامل _ گزینه ها

ساختار کلی تحلیل سلسله مراتبی



سلسله مراتبی انتخاب یک مدرسه

S: کیفیت آموزشی F: استاندارد کلی دانش آموزان V: نظم K: آمادگی برای دانشگاه L: آموزشهای جانبی



محاسبه وزن در فرایند تحلیل سلسله مراتبی

محاسبه وزن در فرایند تحلیل سلسله مراتبی در دو قسمت جداگانه زیر مورد بحث قرار می گیرد:

□ وزن نسبی (local priority)

□ وزن نهایی (overall priority)

روشهای محاسبه وزن نسبی

1. روش حداقل مربعات
2. روش حداقل مربعات لگاریتمی
3. روش بردار ویژه
4. روشهای تقریبی

روش حداقل مربعات (least squares method)

ها (i و زدر حالت سازگاری (به ازاء کلیه $W_i = a_{ij} W_j$

$$a_{ij} = W_i / W_j \text{ یا}$$

یا i و زدر حالت ناسازگاری (حداقل برای یکی $W_i \neq a_{ij} W_j$

$$a_{ij} \neq W_i / W_j$$

$$MINZ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} W_j - W_i)^2$$

St:

$$\sum_{i=1}^n W_i = 1$$

برای حل مساله فوق ، معادله لاگرانژی آن به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} W_j - W_i)^2 + 2\lambda \left(\sum_{i=1}^n W_i - 1 \right)$$

اگر از معادله فوق نسبت به W_1 مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\sum_{i=1}^n (a_{il} W_l - W_i) a_{il} - \sum_{j=1}^n (a_{lj} W_j - W_l) + \lambda = 0 \quad l = 1, 2, \dots, n$$

اگر $n=2$ باشد ، داریم :

$$\begin{aligned} & (a_{11}^2 - 2a_{11} + a_{21}^2 + 2).W_1 - (a_{12} + a_{21}).W_2 + \lambda = 0 \\ & -(a_{21} + a_{12}).W_1 + (a_{12}^2 - 2a_{12} + a_{22}^2 + 2).W_2 + \lambda = 0 \\ & W_1 + W_2 = 1 \end{aligned}$$

مثال

ماتریس مقایسه زوجی زیر را در نظر بگیرید :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

(۱) نشان می دهیم ماتریس مقایسه ، ناسازگار است .

(۲) وزن هر معیار را با روش حداقل مربعات به دست می آوریم.

اگر رابطه $a_{ik} \cdot a_{kj} = a_{ij}$ برای یکی از i, j, k ها برقرار نباشد ماتریس ناسازگار خواهد بود.

$$a_{12} = 1/3, a_{23} = 3 \Rightarrow a_{13} \neq a_{12} \times a_{23} = 1/3 \times 3 = 1$$

$$15W_1 - 10/3W_2 - 5/2W_3 + \lambda = 0$$

$$-10/3W_1 + 20/9W_2 - 10/3W_3 + \lambda = 0$$

$$-5/2W_1 - 10/3W_2 + 45/4W_3 + \lambda = 0$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = 1$$

از حل دستگاه فوق خواهیم داشت :

$$W_1 = 0.1735$$

$$W_2 = 0.6059$$

$$W_3 = 0.2206$$

روش حداقل مربعات لگاریتمی (logarithmic least squares method)

یا $a_{ij} = \frac{W_i}{W_j}$ $a_{ij} = \frac{W_j}{W_i} = 1$ (ها) i و j در حالت سازگاری (به ازای کلیه)

(یا i و j در حالت ناسازگاری (حداقل برای یک $a_{ij} \neq \frac{W_j}{W_i}$ $a_{ij} \neq \frac{W_i}{W_j}$)

میانگین هندسی این اختلافات برابر است با:

$$\left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n a_{ij} \frac{W_j}{W_i} \right)^{\frac{1}{n^2}} = Z^{\frac{1}{n^2}}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(Lna_{ij} - Ln(W_i / W_j) \right) = 0 \text{ در حالت سازگاری}$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(Lna_{ij} - Ln(W_i / W_j) \right) = \frac{1}{n^2} LnZ \text{ در حالت ناسازگاری}$$

روش بردار ویژه (Eigenvector Method)

$$\begin{aligned}a_{11} W_1 + a_{12} W_2 + \cdots + a_{1n} W_n &= \lambda \cdot W_1 \\a_{21} W_1 + a_{22} W_2 + \cdots + a_{2n} W_n &= \lambda \cdot W_2 \\&\vdots \\a_{n1} W_1 + a_{n2} W_2 + \cdots + a_{nn} W_n &= \lambda \cdot W_n\end{aligned}$$

a_{ij} ترجیح عنصر i ام بر j ام است و W_i وزن عنصر i ام و λ یک عدد ثابت است.

ام طبق تعریف قبل برابر است با: i وزن عنصر

$$W_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n a_{ij} W_j \quad i = 1, 2, \dots, n$$

دستگاه معادلات فوق را به صورت زیر می توان نوشت:

$$A \times W = \lambda . W$$

A که همان ماتریس مقایسه زوجی $\{$ یعنی $A = [a_{ij}]$ و بردار وزن W یک اسکالر است.

مثال

برای ماتریس زیر، بردار و مقدار ویژه را محاسبه می کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2W_1 + 4W_2 \\ 3W_1 + 3W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda.W_1 \\ \lambda.W_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2W_1 + 4W_2 - \lambda.W_1 = 0 \\ 3W_1 + 3W_2 - \lambda.W_2 = 0 \end{cases}$$

برای حل این دستگاه می توان نوشت:

$$\begin{cases} (2 - \lambda) W_1 + 4 W_2 = 0 \\ 3 W_1 + (3 - \lambda) W_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 (2 - \lambda) W_1 + 12 W_2 = 0 \\ -3 (2 - \lambda) W_1 - (2 - \lambda)(3 - \lambda) W_2 = 0 \end{cases}$$

که خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} 12 W_2 - (2 - \lambda)(3 - \lambda) W_2 &= 0 \\ W_2 &\neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 12 - (2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = +6, -1$$

با قرار دادن مقدار λ در دستگاه فوق و با استفاده از رابطه $W_1 + W_2 = 1$ ، بردارهای ویژه به شکل زیر خواهند بود.

$$\lambda = 6 \Rightarrow -4W_1 + 4W_2 = 0 \Rightarrow W_1 = W_2 = 0.5$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow 3W_1 + 4W_2 = 0 \Rightarrow W_1 = 4, W_2 = -3$$

رابطه بین بردار ویژه و مقدار ویژه به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

در روش بردار ویژه برای محاسبه وزن‌ها ، طبق مراحل زیر عمل می کنیم:

1. ماتریس A را تشکیل می دهیم.
2. ماتریس $(A - \lambda I)$ را مشخص کنید.
3. دترمینان ماتریس $(A - \lambda I)$ را محاسبه کرده و آن را مساوی صفر قرار داده و مقادیر λ را محاسبه کنید.
4. بزرگترین $\lambda_{\max}$ را نامیده و آن را در رابطه $(A - \lambda_{\max} I) \times W = 0$ قرار داده و با استفاده از رابطه W_i مقادیر W ها را محاسبه نمایید.

مثال

اگر ماتریس مقایسه زوجی به صورت زیر باشد وزن معیارها را با استفاده از روش بردار ویژه بدست می آوریم .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + \frac{5}{2} = 0$$

بعد از حل معادله قبل، $\lambda_{\max} = 3.0536$ محاسبه می گردد. معادله ماتریسی

$$(A - \lambda_{\max} I) \times W = 0$$

تشکیل داده و W_i ها محاسبه می کنیم.

$$\begin{bmatrix} -2.0536 & 1/3 & 1/2 \\ 3 & -2.0536 & 3 \\ 2 & 1/3 & -2.0536 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = 0$$

معادله را به دستگاه فوق اضافه می کنیم. نتیجه زیر حاصل می

شود. $W_1 + W_2 + W_3 = 1$

$$W^T = (0.1571, 0.5936, 0.2493)$$

قضیه:

برای یک ماتریس مثبت و معکوس ، همچون ماتریس مقایسه زوجی ، بردار ویژه را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$W = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k \cdot e}{e^T \cdot A^k \cdot e}$$

$$e^T = (1, 1, \dots, 1) \text{ می باشد.}$$

که در آن

ابتدا $A^k.e$ را محاسبه می کنیم. بطور مثال برای $k = 1$ داریم:

$$A^k.e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{bmatrix}$$

حال حاصل عبارت $e^T.A^k.e$ را محاسبه می نماییم:

$$e^T.A^k.e = e^T.(A^k.e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

مثال

اگر ماتریس مقایسه زوجی برای چهار عنصر به صورت زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/9 & 1/3 & 1/4 \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1/3 & 1 & 1/2 \\ 4 & 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

محاسبه وزن عناصر با استفاده از قضیه قبل به صورت زیر است:

حل:

$$W^1 = \frac{A^1 \cdot e}{e^T \cdot A^1 \cdot e}$$

در تکرار اول داریم:

$$\begin{bmatrix} 1.694 \\ 15 \\ 4.833 \\ 7.50 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بردار حاصل از جمع سطری ماتریس A نرمالیزه}} \begin{bmatrix} 0.05837 \\ 0.51675 \\ 0.16651 \\ 0.25837 \end{bmatrix}$$

در تکرار دوم داریم:

$$W^2 = \frac{A^2 \cdot e}{e^T \cdot A^2 \cdot e}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0.4583 & 1.5 & 0.8889 \\ 35 & 4 & 13 & 7.75 \\ 11 & 1.25 & 4 & 2.4167 \\ 18.5 & 2.1111 & 6.8333 & 4 \end{bmatrix}$$

بنابر این خواهیم داشت:

$$W^2 = (0.05867 \quad 0.51196 \quad 0.15994 \quad 0.26943)$$

مقدار نهایی W در تکرار سوم و چهارم و پنجم به صورت زیر است:

$$W^3 = (0.05882 \quad 0.51259 \quad 0.15958 \quad 0.26943)$$

$$W^4 = (0.05882 \quad 0.51261 \quad 0.15971 \quad 0.26886)$$

$$W^5 = (0.05882 \quad 0.51261 \quad 0.15971 \quad 0.26886)$$

روشهای تقریبی (Approximation Method)

1. مجموع سطری
2. مجموع ستونی
3. میانگین حسابی
4. میانگین هندسی

مثال

ماتریس مقایسه زوجی زیر در دست است. با چهار روش ذکر شده بردار وزن را محاسبه می کنیم.

$$\begin{array}{c} A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

مجموع سطری:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع عناصر هر سطر}} \begin{bmatrix} 19 \\ 11.20 \\ 5.42 \\ 1.56 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بردار نرمالیزه}} \begin{bmatrix} 0.51 \\ 0.30 \\ 0.15 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

مجموع ستونی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 6 & 4 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع عناصر هر ستون}} (1.51 \quad 6.43 \quad 11.25 \quad 18)$$

$$\xrightarrow{\text{بردار معکوس}} (0.66 \quad 0.16 \quad 0.09 \quad 0.06) \xrightarrow{\text{بردار نرمالیزه}} (0.68 \quad 0.16 \quad 0.09 \quad 0.06)$$

میانگین حسابی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نرمالیزه ی ستونها}} \begin{bmatrix} 0.66 & 0.78 & 0.53 & 0.39 \\ 0.13 & 0.16 & 0.36 & 0.33 \\ 0.11 & 0.04 & 0.09 & 0.22 \\ 0.09 & 0.03 & 0.02 & 0.06 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{میانگین سطری}} \begin{bmatrix} 0.590 \\ 0.245 \\ 0.115 \\ 0.050 \end{bmatrix}$$

میانگین هندسی:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{میانگین هندسی}} \begin{bmatrix} \sqrt[4]{1 \times 5 \times 6 \times 7} = 3.807 \\ \sqrt[4]{1/5 \times 1 \times 4 \times 6} = 1.480 \\ \sqrt[4]{1/6 \times 1/4 \times 1 \times 4} = 0.639 \\ \sqrt[4]{1/7 \times 1/6 \times 1/4 \times 1} = 0.278 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{نرمالیزه ی ستونها}} \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.24 \\ 0.10 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

محاسبه وزن نهایی

وزن نهایی هر گزینه در یک فرایند سلسله مراتبی از مجموع حاصلضرب اهمیت معیارها در وزن گزینه ها بدست می آید.

مثال

مدیر عامل کارخانه ای قصد دارد از بین دو نفر به اسامی X و Y یکی را به عنوان مدیر بخش بازاریابی انتخاب نماید معیار های مورد نظر او عبارتند از: قابلیت رهبری و هدایت (L) تواناییهای شخصی (P) و تواناییهای اداری (A) ماتریسهای مقایسه زوجی زیر در این مورد بدست آمده اند.

قابلیت رهبری (L)

$$\begin{matrix} & X & Y \\ X & \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \\ Y & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

تواناییهای شخصی (P)

$$\begin{matrix} & X & Y \\ X & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ Y & \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

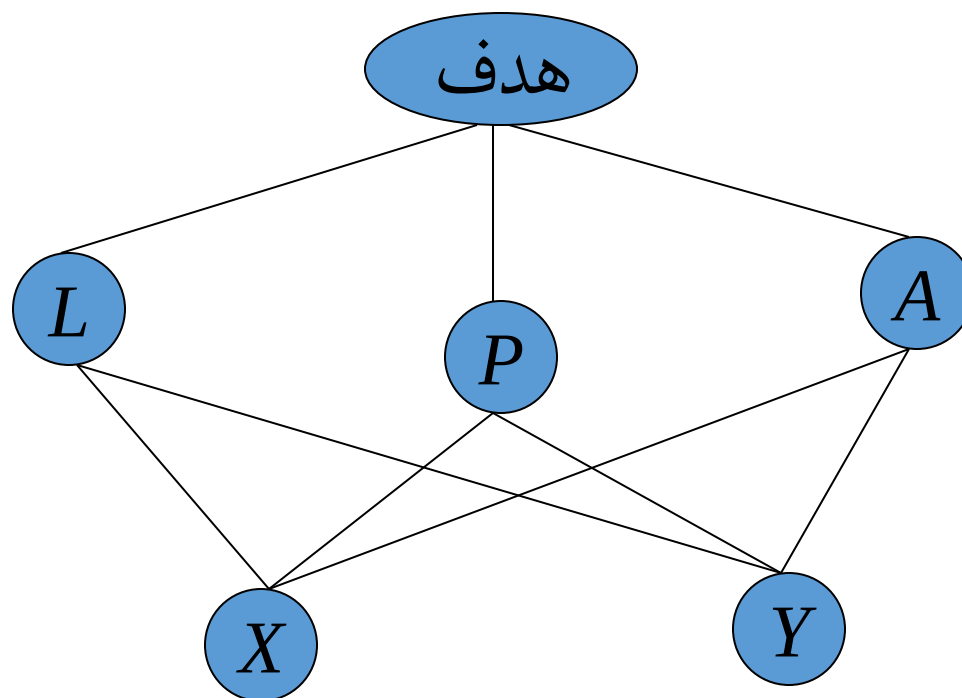
معیارهای تواناییهای اداری (A)

$$\begin{matrix} & X & Y \\ X & \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ Y & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & L & P & A \\ L & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ P & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ A & \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

حل:

ابتدا سلسله مراتب مربوطه را رسم می کنیم.



محاسبه وزن

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normalize}} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{6}{33} & \frac{1}{13} \\ \frac{3}{8} & \frac{6}{11} & \frac{8}{13} \\ \frac{4}{8} & \frac{6}{22} & \frac{4}{13} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rowmeans}} \bar{W}_1 = \begin{bmatrix} 0.128 \\ 0.512 \\ 0.360 \end{bmatrix}$$

یعنی داریم:

$$W_A = 0.360, \quad W_P = 0.512, \quad W_L = 0.128$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normalize}} \bar{W}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow W_{LX} = \frac{4}{5}, W_{LY} = \frac{1}{5}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normalize}} \bar{W}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow W_{PX} = \frac{1}{4}, W_{PY} = \frac{3}{4}$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normalize}} \bar{W}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow W_{AX} = \frac{2}{3}, W_{AY} = \frac{1}{3}$$

محاسبه وزن نهایی:

$$W_X = \left(\frac{4}{5} \times 0.128\right) + \left(\frac{1}{4} \times 0.512\right) + \left(\frac{2}{3} \times 0.360\right) = 0.4704$$

$$W_Y = \left(\frac{1}{5} \times 0.128\right) + \left(\frac{3}{4} \times 0.512\right) + \left(\frac{1}{3} \times 0.360\right) = 0.5296$$

توجه داشته باشید که $W_X + W_Y = 1$ بنابراین این گزینه یا شخص Y انتخاب می گردد.

محاسبه نرخ ناسازگاری:

- ماتریس سازگار و خصوصیات آن
- ماتریس ناسازگار و خصوصیات آن
- الگوریتم محاسبه نرخ ناسازگاری یک ماتریس
- الگوریتم محاسبه نرخ ناسازگاری یک سلسله مراتبی

ماتریس سازگار و خصوصیات آن

اگر n معیار به شرح $C_1, C_2, \dots, C_n$ داشته باشیم و ماتریس مقایسه زوجی آنها به صورت زیر باشد :

$$A = [a_{ij}] \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

که در آن ترجیح عنصر a_{ij} را بر نشان می دهد . چنانچه در این ماتریس داشته باشیم :

$$a_{ik} \times a_{kj} = a_{ij} \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n$$

آنگاه می گوییم ماتریس A سازگار است .

مثال

$$p_1 = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \\ B & \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ C & \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{اهمیت نسبی عناصر نسبت به } C = \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\text{اهمیت نسبی عناصر نسبت به } B = \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

طبق تعریف می توان گفت مقدارویژه این ماتریس (λ) از رابطه زیر به دست می آید:

$$P_1 \times W = \lambda . W$$

که حاصلضرب $P_1 \times W$ برابر است با :

$$P_1 \times W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 0.9 \\ 0.3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 3W$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$P_1 \times W = 3 . W$$

هر ماتریس سازگار دارای خصوصیات زیر است :

1. مقدار وزن عناصر برابر مقدار نرمالیزه هر عنصر می باشد.
2. مقدار ویژه برابر طول ماتریس است) $AW = nW$
3. مقدار ناسازگاری در این ماتریس صفر است .

ماتریس ناسازگار و خصوصیات آن

قضیه یک - اگر $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس مقایسه زوجی A باشد مجموع مقادیر آنها برابر n است :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n$$

قضیه دو - بزرگترین مقدار ویژه همواره بزرگترین یا مساوی n است (در این صورت برخی از ها منفی خواهند بود).

$$\lambda_{\max} \geq n$$

قضیه سه - اگر عناصر ماتریس مقدار کمی از حالت سازگاری فاصله بگیرد ، مقدار ویژه آن نیز مقدار کمی از حالت سازگاری خود فاصله خواهد گرفت .

که در آن به ترتیب بردار ویژه و مقدار ویژه ماتریس A می باشد . یک مقدار ویژه برابر n بوده (بزرگترین مقدار ویژه) و بقیه آنها برابر صفر هستند . بنابراین در این حالت می توان نوشت :

$$A \times W = \lambda . W$$

در حالتی که ماتریس مقایسه زوجی A ناسازگار باشد طبق قضیه ۳ ،

$$\lambda \quad W$$

$$AW = nW$$

$$\lambda_{\max}$$

کمی از n فاصله می گیرد که می توان نوشت :

$$A \times W = \lambda_{\max} \cdot W$$

$$\lambda_{\max} - n$$

شاخص ناسازگاری

$$I.I = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

الگوریتم محاسبه نرخ ناسازگاری یک ماتریس

۱. ماتریس مقایسه زوجی A را تشکیل دهید.

۲. بردار وزن W را مشخص نمایید .

۳. آیا بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A (یعنی $\lambda_{\max}$ مشخص است ؟ اگر پاسخ مثبت است به قدم چهارم بروید . در غیر این صورت با توجه به قدم های زیر مقدار آن را تخمین بزنید :

۱-۳- با ضرب بردار W در ماتریس A تخمین مناسبی از به دست آورید

۲-۳- با تقسیم مقادیر به دست آمده برای بردار W مربوطه تخمین هایی از را محاسبه نمایید .

۳-۳- متوسط $\lambda_{\max}$ به دست آمده را پیدا کنید .
 $\lambda_{\max} \cdot W$
 $\lambda_{\max} \cdot W$

۴. مقدار شاخص ناسازگاری را از رابطه زیر محاسبه می کنیم:

$$I.I = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

۵. نرخ ناسازگاری را از فرمول زیر به دست آورید :

$$I.R. = \frac{I.I.}{I.I.R}$$

مثال

برای ماتریس مقایسه زوجی زیر نرخ ناسازگاری را محاسبه کنید .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1/2 & 1 & 6 \\ 1/8 & 1/6 & 1 \end{bmatrix}$$

حل

قدم ۱ و ۲: با استفاده از روش میانگین حسابی داریم :

$$W = \begin{bmatrix} 0.593 \\ 0.341 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

قدم ۳: از آنجا که مقدار $\lambda_{\max}$ مشخص نمی باشد ، باید آن را طبق قدم های زیر تخمین بزنیم .

قدم ۳-۱ - تخمین $W \cdot \lambda_{\max}$

$$A \cdot W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1/2 & 1 & 6 \\ 1/8 & 1/6 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.593 \\ 0.341 \\ 0.066 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.803 \\ 1.034 \\ 0.197 \end{bmatrix}$$

قدم ۳-۲ - محاسبه $\lambda_{\max}$ ها

$$\lambda_{\max 1} = 1.803 / 0.593 = 3.040$$

$$\lambda_{\max 2} = 1.034 / 0.341 = 3.032$$

$$\lambda_{\max 3} = 0.197 / 0.066 = 2.985$$

قدم ۳-۳ - محاسبه میانگین $\lambda_{\max}$ ها

$$\lambda_{\max} = \frac{\lambda_{\max 1} + \lambda_{\max 2} + \lambda_{\max 3}}{3} = 3.019$$

قدم ۴: محاسبه شاخص ناسازگاری

$$I.I = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3.019 - 3}{3 - 1} = 0.010$$

قدم ۵: محاسبه نرخ ناسازگاری

$$I.R. = \frac{I.I.}{I.I.R_{3 \times 3}} = 0.017$$

نرخ ناسازگاری این ماتریس برابر ۰.۰۱۷ است که کمتر از ۰.۱ بوده بنابراین سازگاری آن مورد قبول می باشد .

الگوریتم محاسبه نرخ ناسازگاری یک سلسله مراتبی

برای محاسبه نرخ ناسازگاری یک سلسله مراتبی شاخص ناسازگاری هر ماتریس را در وزن عنصر مربوطه اش ضرب نموده و حاصل جمع آنها را به دست می آوریم. این حاصل جمع را می نامیم. همچنین وزن عناصر را در ماتریس های مربوطه ضرب کرده و مجموعشان را $I \cdot I$ نامگذاری می کنیم. حاصل تقسیم $I \cdot I \cdot R$.

نرخ ناسازگاری سلسله مراتبی $\overline{I \cdot I \cdot R}$ را می دهد.

$$\frac{I \cdot I}{I \cdot I \cdot R}$$

مثال

مدیر عامل کارخانه ای قصد دارد از بین دو نفر به اسامی X و Y یکی را به عنوان مدیر بخش بازاریابی انتخاب نماید معیار های مورد نظر او عبارتند از: قابلیت رهبری و هدایت (L) تواناییهای شخصی (P) و تواناییهای اداری (A) ماتریسهای مقایسه زوجی زیر در این مورد بدست آمده اند.

قابلیت رهبری (L)

$$\begin{matrix} & X & Y \\ X & \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \\ Y & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

تواناییهای شخصی (P)

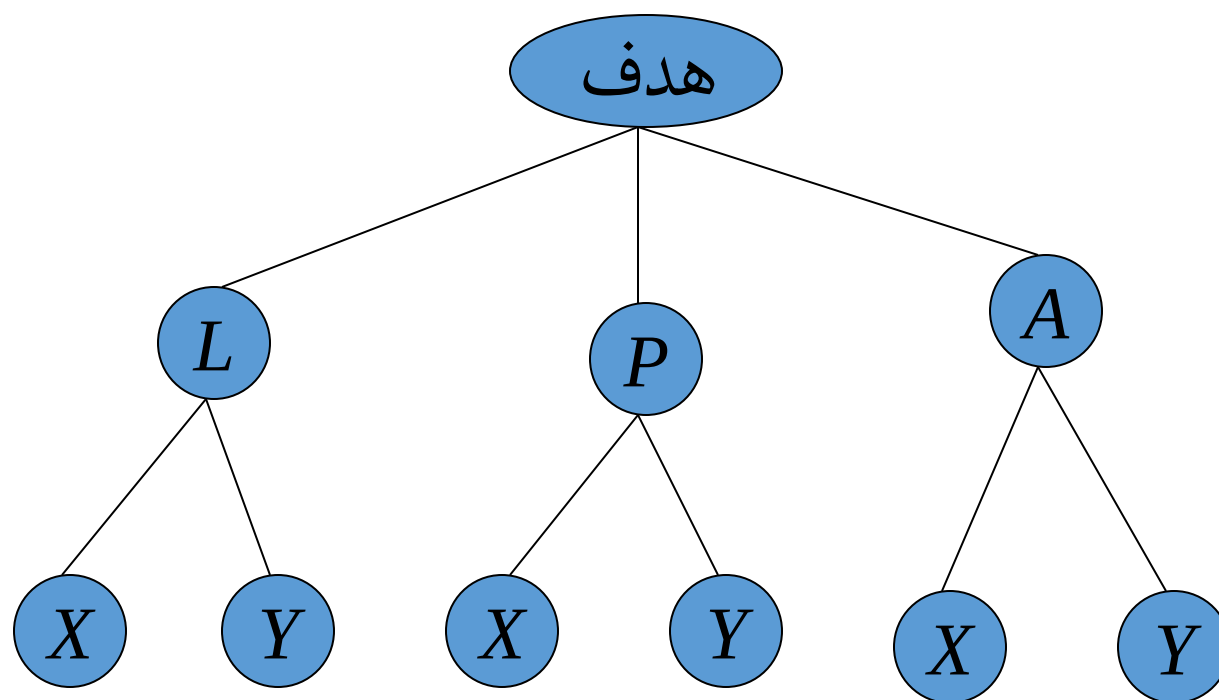
$$\begin{matrix} & X & Y \\ X & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ Y & \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

معیارهای تواناییهای اداری (A)

$$\begin{matrix} & X & Y \\ X & \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ Y & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & L & P & A \\ L & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ P & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ A & \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

در این مثال نرخ ناسازگاری سلسله مراتبی را محاسبه می نماییم :



با به کارگیری روش میانگین حسابی وزن های محلی عبارتنداز:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normalize}} \begin{bmatrix} 1/8 & 6/33 & 1/13 \\ 3/8 & 6/11 & 8/13 \\ 4/8 & 6/22 & 4/13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normalize}} W_1 = \begin{bmatrix} 0.128 \\ 0.512 \\ 0.360 \end{bmatrix}$$

یعنی داریم :

$$W_A = 0.360 \quad , \quad W_p = 0.512 \quad , \quad W_L = 0.128$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normalize}} W_2 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \Rightarrow W_{LX} = 4/5 \quad , \quad W_{LY} = 1/5$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normalize}} W_3 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} \Rightarrow W_{PX} = 1/4 \quad , \quad W_{PY} = 3/4$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normalize}} W_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow W_{AX} = 2/3 \quad , \quad W_{AY} = 1/3$$

وزن های نهایی هر کدام از این گزینه ها برابر است با :

$$W_x = (4/5 \times 0.128) + (1/4 \times 0.512) + (2/3 \times 0.360) = 0.4704$$

$$W_y = (1/5 \times 0.128) + (3/4 \times 0.512) + (1/3 \times 0.360) = 0.5296$$

برای ماتریس D_1 داریم :

$$D_1 \times W_1 = \lambda_{\max} \cdot W_1$$

$$D_1 \times W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.128 \\ 0.512 \\ 0.360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.389 \\ 1.616 \\ 1.128 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max} \cdot W_1 = \begin{bmatrix} 0.389 \\ 1.616 \\ 1.128 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{\max} = \begin{bmatrix} 3.039 \\ 3.156 \\ 3.133 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{\lambda_{\max 1} + \lambda_{\max 2} + \lambda_{\max 3}}{3} = 3.019$$

$$I.I = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{3.019 - 3}{3 - 1} = 0.054 \qquad I.I.R._{3 \times 3} = 0.58$$

به همین ترتیب برای ماتریس‌ها D_2 ، D_3 ، D_4 می‌توان نوشت:

$$I.I._2 = I.I._3 = I.I._4 = 0$$

$$I.I.R._2 = I.I.R._3 = I.I.R._4 = 0$$

$$\overline{I.I.} = (1 \times 0.054) + [0.128 \quad 0.512 \quad 0.360] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.054$$

$$\overline{I.I.R.} = (1 \times 0.580) + [0.128 \quad 0.512 \quad 0.360] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.580$$

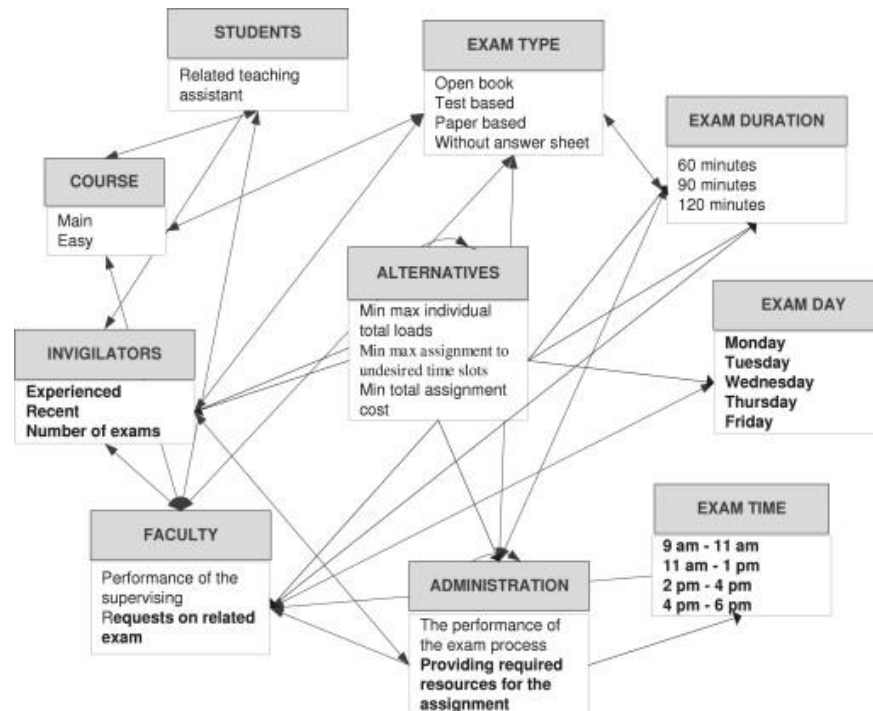
$$\Rightarrow I.R. = \frac{\overline{I.I.}}{\overline{I.I.R.}} = \frac{0.054}{0.580} = 0.093$$

در این سلسله مراتبی میزان ناسازگاری کمتر از ۰.۱ بوده و قابل قبول است و نیازی به تجدید نظر در قضاوت ها نیست .

ANP

ANP

- روش ANP تعمیم روش AHP است. در مواردی که سطوح پایینی روی سطوح بالایی اثرگذارند و یا عناصری که در یک سطح قرار دارند مستقل از هم نیستند، دیگر نمی توان از روش AHP استفاده کرد ANP. شکل کلی تری از AHP است، اما به ساختار سلسله مراتبی نیاز ندارد و در نتیجه روابط پیچیده تر بین سطوح مختلف تصمیم را به صورت شبکه ای نشان می دهد و تعاملات و بازخورد های میان معیارها و آلترناتیوها را در نظر می گیرد.



ANP

- یکی از اصول و یا فرض های اساسی روش AHP فرض استقلال است.
- یعنی وزن معیارها مستقل از گزینه ها (یا معیارهای دیگر) است.
- در ادامه مثالی مطرح می شود که در آن این حالت برقرار نیست:

مثال

می خواهیم یکی را انتخاب نماییم. هزینه خرید و حمل آنها B و A از بین دو کالای در جدول زیر آمده است.

کالا	هزینه خرید	هزینه حمل
A	1000	200
B	2000	100

ANP

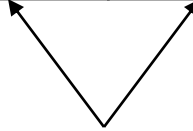
- در شرایطی که وزن معیارها وابسته به گزینه ها است در روش ANP از ماتریس بزرگ یا سوپر ماتریس برای حل مساله استفاده می شود.
- ماتریس بزرگ ماتریسی است که در آن وزن معیارها نسبت به گزینه ها و وزن گزینه ها نسبت به معیارها (که از طریق مقایسات زوجی حاصل شده اند) ثبت شده و بخش هایی از ماتریس که درمورد آنها مقایسات زوجی صورت نگرفته صفر در نظر گرفته شده است.
- توان های بالای این ماتریس وزن نهایی گزینه ها را مشخص می کند.

ماتریس بزرگ

	C1	C2	A	B
C1	0	0	5/6	20/21
C2	0	0	1/6	1/21
A	2/3	1/3	0	0
B	1/3	2/3	0	0

توان سوم ماتریس بزرگ

	C1	C2	A	B
C1	0	0	0.88	0.88
C2	0	0	0.12	0.12
A	0.63	0.63	0	0
B	0.37	0.37	0	0



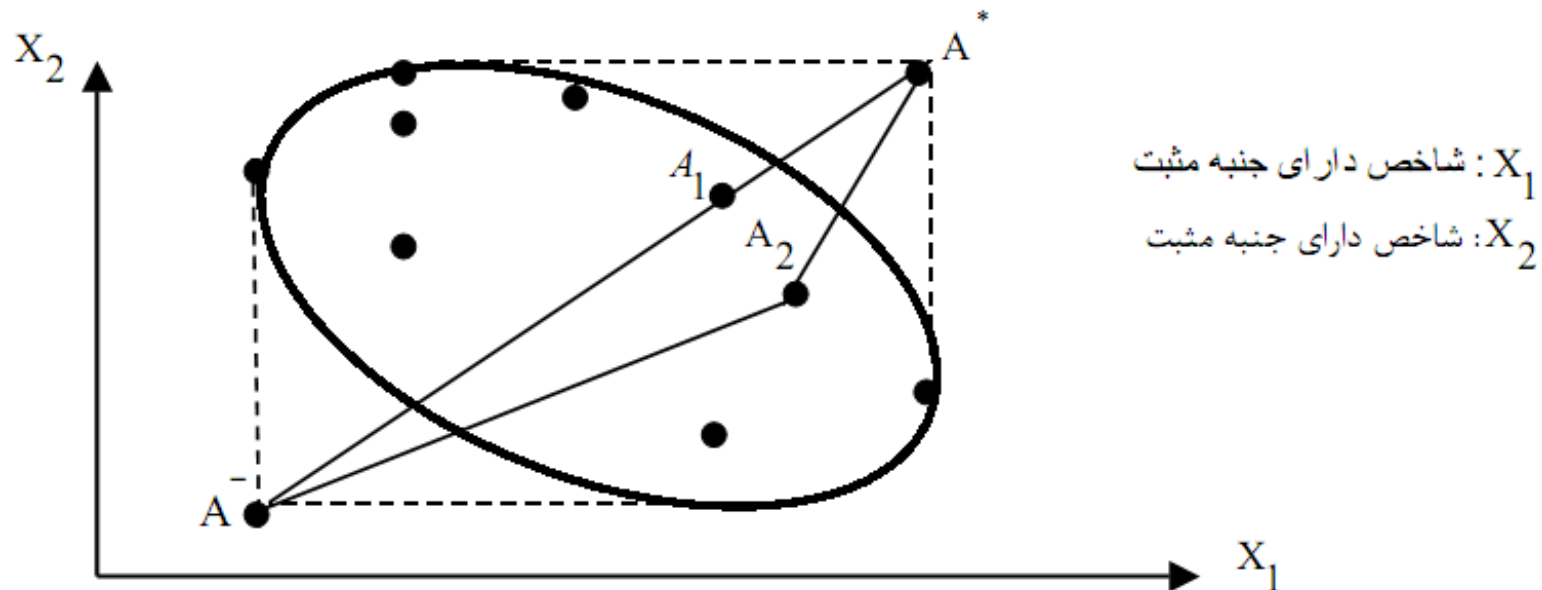
وزن نهایی گزینه ها نسبت
به معیارها

TOPSIS

(یکی از روشهای تصمیم گیری چند شاخصه)

❖ روش TOPSIS در سال ۱۹۸۱ توسط هوانگ و یون ارایه گردید.

❖ TOPSIS بر این مفهوم استوار است که گزینه انتخابی باید کمترین فاصله را با راه حل ایده آل مثبت و بیشترین فاصله را با راه حل ایده آل منفی داشته باشد.



❖ در این روش m گزینه به وسیله n شاخص مورد ارزیابی قرار میگیرند و هر مساله را می توان به عنوان یک سیستم هندسی شامل m نقطه در یک فضای n بعدی در نظر گرفت.

این روش دارای ۶ گام است:

گام صفر: به دست آوردن ماتریس تصمیم

❖ در این روش ماتریس تصمیمی ارزیابی می‌شود که شامل m گزینه و n شاخص است.

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} X_1 & X_2 & & X_j & & X_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ X_{i1} & X_{i2} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{in} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{mj} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A_i : گزینه i ام

X_{ij} : مقدار عددی بدست آمده از

گزینه i ام با شاخص j ام

❖ در این ماتریس شاخصی که دارای مطلوبیت مثبت است، شاخص سود و شاخصی که دارای مطلوبیت منفی است، شاخص هزینه می‌باشد.

گام اول: نرمالایز کردن ماتریس تصمیم

❖ در این گام مقیاسهای موجود در ماتریس تصمیم را بدون مقیاس می کنیم. به این ترتیب که هر کدام از مقادیر بر اندازه بردار مربوط به همان شاخص تقسیم می شود.

❖ در نتیجه هر درایه r_{ij} از رابطه زیر به دست می آید:

$$r_{ij} = \frac{X_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m X_{ij}^2}}$$

گام دوم: وزن دهی به ماتریس نرمالایز شده:

❖ ماتریس تصمیم در واقع پارامتری است و لازم است کمی شود، به این منظور تصمیم گیرنده برای هر شاخص وزنی را معین میکند.

❖ مجموعه وزنها (w) در ماتریس نرمالایز شده (R) ضرب میشود.

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_j & \dots & w_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

❖ با توجه به اینکه ماتریس W_{n*1} قابل ضرب در ماتریس تصمیم نرمالایز شده ($n*n$) نیست، قبل از ضرب باید ماتریس وزن را به یک ماتریس قطری W_{n*n} تبدیل نمود. (وزنها روی قطر اصلی)

گام سوم: تعیین راه حل ایده آل و راه حل ایده آل منفی:

❖ دو گزینه مجازی A^* و A^- را به صورتهای زیر تعریف می کنیم:

$$A^* = \left\{ \left(\max_i v_{ij} | j \in J \right) \text{ و } \left(\min_i v_{ij} | j \in J' \right) \middle| i = 1 \text{ و } 2 \text{ و } \dots \text{ و } m \right\} = \{v_1^* \text{ و } v_2^* \text{ و } \dots \text{ و } v_j^* \text{ و } \dots \text{ و } v_n^*\}$$
$$A^- = \left\{ \left(\min_i v_{ij} | j \in J \right) \text{ و } \left(\max_i v_{ij} | j \in J' \right) \middle| i = 1 \text{ و } 2 \text{ و } \dots \text{ و } m \right\} = \{v_1^- \text{ و } v_2^- \text{ و } \dots \text{ و } v_j^- \text{ و } \dots \text{ و } v_n^-\}$$

$$j \mapsto J = \{j = 1, 2, 3, \dots, n\} \text{ های مربوط به شاخص سود}$$
$$j \mapsto J' = \{j = 1, 2, 3, \dots, n\} \text{ های مربوط به شاخص هزینه}$$

❖ دو گزینه مجازی ایجاد شده در واقع بدترین و بهترین راه حل هستند.

گام چهارم: به دست آوردن اندازه فاصله ها

❖ فاصله بین هر گزینه n بعدی را از روش اقلیدسی می سنجیم. یعنی فاصله گزینه i را از گزینه های ایده آل مثبت و منفی می یابیم .

$$S_{i*} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^*)^2} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$S_{i-} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

*

گام پنجم: محاسبه نزدیکی نسبی به راه حل ایده آل

❖ این معیار از طریق فرمول زیر به دست می آید:

$$C_{i*} = \frac{S_{i-}}{S_{i*} + S_{i-}} \quad 0 < C_{i*} < 1$$

ملاحظه می شود که اگر $A_i = A^*$ آنگاه $C_{i*} = 1$ و اگر $A_i = A^-$ آنگاه $C_{i*} = 0$

❖ مشخص است که هر چه فاصله گزینه A_i از راه حل ایده آل کمتر باشد نزدیکی نسبی به ۱ نزدیکتر خواهد بود.

گام ششم: رتبه بندی گزینه ها

❖ نهایتا گزینه ها را بر اساس ترتیب نزولی رتبه بندی می کنیم .

❖ مثال عددی (مسئله انتخاب هواپیمای جنگنده)

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1500 & 20000 & 5.5 & 5 & 9 \\ 2.5 & 2700 & 18000 & 6.5 & 3 & 5 \\ 1.8 & 2000 & 21000 & 4.5 & 7 & 7 \\ 2.2 & 1800 & 20000 & 5 & 5 & 5 \end{array} \right] \end{matrix}$$

❖ همه شاخص ها مربوط به سود هستند بجز شاخص X_4 .

(1) نرمالایز کردن ماتریس تصمیم:

$$R = \begin{bmatrix} 0.4671 & 0.3662 & 0.5056 & 0.5063 & 0.4811 & 0.6708 \\ 0.5839 & 0.6591 & 0.4550 & 0.5983 & 0.2887 & 0.3727 \\ 0.4204 & 0.4882 & 0.5308 & 0.4143 & 0.6736 & 0.5217 \\ 0.5139 & 0.4392 & 0.5056 & 0.4603 & 0.4811 & 0.3727 \end{bmatrix}$$

(2) وزن دادن به ماتریس تصمیم:

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) = (0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.0934 & 0.0366 & 0.0506 & 0.0506 & 0.0962 & 0.2012 \\ 0.1168 & 0.0659 & 0.0455 & 0.0598 & 0.0577 & 0.1118 \\ 0.0841 & 0.0488 & 0.0531 & 0.0414 & 0.1347 & 0.1565 \\ 0.1028 & 0.0439 & 0.0506 & 0.0460 & 0.0962 & 0.1118 \end{bmatrix}$$

(3) تعیین راه حل ایده ال و ایده ال منفی:

$$A^* = \left(\max_i v_{i1} \text{ و } \max_i v_{i2} \text{ و } \max_i v_{i3} \text{ و } \min_i v_{i4} \text{ و } \max_i v_{i5} \text{ و } \max_i v_{i6} \right) \\ = (0.1168 \text{ و } 0.0659 \text{ و } 0.0531 \text{ و } 0.0414 \text{ و } 0.1347 \text{ و } 0.2012)$$

$$A^- = \left(\min_i v_{i1} \text{ و } \min_i v_{i2} \text{ و } \min_i v_{i3} \text{ و } \max_i v_{i4} \text{ و } \min_i v_{i5} \text{ و } \min_i v_{i6} \right) \\ = (0.0841 \text{ و } 0.0366 \text{ و } 0.0455 \text{ و } 0.0598 \text{ و } 0.0577 \text{ و } 0.1118)$$

(4) محاسبه اندازه فاصله:

$$S_{i*} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^*)^2} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

فاصله گزینه i ام از ایده ال مثبت

$$S_{1*} = 0.0545$$

$$S_{2*} = 0.1197$$

$$S_{3*} = 0.0580$$

$$S_{4*} = 0.1009$$

$$S_{i-} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

فاصله گزینه i ام از ایده ال منفی

$$S_{1-} = 0.0983$$

$$S_{2-} = 0.0439$$

$$S_{3-} = 0.0920$$

$$S_{4-} = 0.0458$$

(5) - محاسبه نزدیکی نسبی به راه حل ایده ال:

$$C_{1*} = \frac{S_{1-}}{S_{1*} + S_{1-}} = 0.643$$

$$C_{2*} = 0.268$$

$$C_{3*} = 0.613$$

$$C_{4*} = 0.312$$

6) رتبه بندی گزینه ها:

❖ براساس ترتیب نزولی C_i^* رتبه بندی گزینه ها به صورت زیر می شود:

A_1 و A_3 و A_4 و A_2

SAW

SAW

- در روش (SAW) سعی به برآورد تابع مطلوبیتی به ازای هر گزینه است تا گزینه ای با بیشترین مطلوبیت انتخاب شود. در این روش فرض بر استقلال ارجحیت و مجزا بودن آثار شاخص ها از یکدیگر است. در این روش با محاسبه اوزان اهمیت شاخص ها می توان به راحتی به ارجحیت گزینه ها دست یافت.

SAW

Simple Additive Weighting method

$$A^* = \left\{ A_i \mid \text{Max} \sum_{j=1}^n n_{ij} w_j \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0.333 & 0.4 & 0.556 & 1 & 0.333 \\ 1 & 0.6 & 0.778 & 0.556 & 0.778 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.333 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.239 \\ 0.189 \\ 0.076 \\ 0.263 \\ 0.234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.529 \\ 0.749 \\ 0.696 \end{bmatrix}$$

LINMAP

LINMAP

- این روش به دنبال یافتن گزینه ایست که کمترین فاصله را با ایده آل ترین حالت ممکن داشته باشد. در این روش m گزینه و n شاخص از یک مسئله مفروض به صورت m نقطه برداری در یک فضای n بعدی مورد توجه است که از طریق یافتن فاصله اقلیدسی گزینه ها با بهترین گزینه ارجح ترین گزینه انتخاب می شود .

VIKOR

ویکور چیست؟

- یک روش تصمیم گیری چندمعیاره برای حل یک مسأله تصمیم گیری گسسته با معیارهای نامتناسب (واحدهای اندازه گیری مختلف) و متعارض توسط اپروکویک و تزنک ایجاد شده است.
- این مدل از سال ۱۹۸۴ بر مبنای روش توافق جمعی و با داشتن معیارهای متضاد تهیه شده و عموماً برای حل مسائل گسسته کاربرد دارد.
- تفاوت اصلی این مدل با مدل های تصمیم گیری سلسله مراتبی یا شبکه ای این است که بر خلاف آن مدل ها، در این مدل ها مقایسات زوجی بین معیارها و گزینه ها صورت نمی گیرد و هر گزینه مستقلاً توسط یک معیار سنجیده و ارزیابی می گردد.
- مزیت مدل ویکور در این است که الزاماً در این مدل جهت ارزیابی گزینه ها بر اساس معیارها، نیازی به استفاده از نظرات کارشناسان نیست بلکه می توان از داده های خام استفاده کرد

VIKOR

- در این روش به منظور رتبه بندی و یافتن بهترین گزینه از مفهوم برترین گزینه استفاده می کند و میزان سازش میان فاصله گزینه ها نسبت به بهترین گزینه و به این علت جزء روش های برنامه ریزی سازشی طبقه بندی می شود.
- این روش در مقایسه با روش تاپسیس، در محاسبه فواصل گزینه ها میزان اهمیت فاصله مطلوب نسبت به بهترین حالت و بدترین حالت را در نظر می گیرد .

مراحل روش ویکور

۱. تشکیل ماتریس تصمیم
۲. تعیین بردار وزن معیارها
۳. تعیین نقطه ایده آل مثبت و ایده آل منفی
۴. محاسبه مقدار سودمندی (S) و مقدار تأسف (R) برای هرگزینه
۵. محاسبه شاخص ویکور (Q) برای هرگزینه
۶. مرتب کردن گزینه ها بر اساس مقادیر S، R و Q

محاسبه شاخص ویکور

$$S_j = \sum_{i=1}^n w_i (f_i^* - f_{ij}) / (f_i^* - f_i^-), \quad (1)$$

$$R_j = \max_i [w_i (f_i^* - f_{ij}) / (f_i^* - f_i^-)], \quad (2)$$

$$Q_j = v(S_j - S^*) / (S^- - S^*) + (1 - v)(R_j - R^*) / (R^- - R^*) \quad (3)$$

where

$$S^* = \min_j S_j, \quad S^- = \max_j S_j,$$

$$R^* = \min_j R_j, \quad R^- = \max_j R_j,$$

ELECTRE

- در این روش به جای رتبه بندی گزینه ها از مفهوم جدیدی معروف به مفهوم غیررتبه ای استفاده می شود. به طور مثال ممکن است از نظر ریاضی گزینه ای هیچ ارجحیتی به دیگر گزینه نداشته باشد اما تصمیم گیرنده و تحلیلگر بهتر بودن آن گزینه به دیگری را بپذیرد.
- در این روش کلیه گزینه ها با استفاده از مقایسات غیر رتبه ای مورد ارزیابی قرار گرفته و بدان طریق گزینه های غیرموثر حذف می شوند.
- کلیه مراحل اجرای این روش بر مبنای یک مجموعه هماهنگ و یک مجموعه غیرهماهنگ پایه ریزی می شوند که به این دلیل این روش معروف به آنالیز هماهنگی هم می باشد .

PROMETHEE

- این روش بر دو مفهوم ترجیح و بی تفاوتی استوار است به این معنی که گزینه A بر گزینه B ترجیح و برتری دارد اگر از نظر توابع ترجیح - که میزان ارجحیت گزینه A بر گزینه B از نظر تصمیم گیرنده را ارائه می دهد- مقدار تابع ترجیح گزینه A بیشتر از تابع ترجیح گزینه B باشد. همینطور گزینه A نسبت به گزینه B بی تفاوت است اگر مقدار تابع ترجیح گزینه A با تابع ترجیح گزینه B برابر باشد.

SMART

- در این روش می توان ترکیبی از شاخص های کیفی و کمی را برای رتبه بندی گزینه های مورد بررسی استفاده کرد. ابتدا به منظور محاسبه وزن و سطح بندی شاخص ها از نظر هر گزینه، محدوده انتخابی برای هر کدام از شاخص ها تعریف می شود و از طریق فرمول های تعریف شده شاخص ها به تفکیک هر گزینه رتبه بندی می شوند. در مرحله بعدی وزن و اهمیت هر شاخص نسبت به هم سنجیده می شود. در پایان وزن و اولویت نهایی گزینه ها از تلفیق اوزان فوق به دست می آید.

REGIME

- در این روش می توان ترکیبی از شاخص های کمی و کیفی را به کار برد در حالی که نیازی به تبدیل شاخص های کیفی به کمی نباشد. با ساخت ماتریس REGIME که حاصل مقایسات زوجی گزینه ها از نظر تمامی شاخص هاست، شاخص های راهنما را محاسبه می کنیم و از این طریق گزینه ها را رتبه بندی کرد.

SIR

- این روش جزء روش های جدید و به نسبت پیچیده تصمیم گیری چندمعیاره طبقه بندی می شود. در این روش مانند روش PROMETHEE توابع ترجیحی وجود دارند که پس از محاسبه ارجحیت هر کدام از گزینه ها نسبت به شاخص ها و یافتن مقدار توابع ترجیح زوجی گزینه ها از نظر شاخص ها، ماتریس **superiority** و **inferiority** را تشکیل داد. در مرحله بعد مانند روش های SAW و TOPSIS ماتریس وزین جریان را تشکیل می دهیم. با محاسبه جریان ها می توان گزینه ها را رتبه بندی کرد.

EVAMIX

- در این روش شاخص ها به دو دسته کیفی (اوردینال) و کمی (کاردینال) تفکیک می شوند و محاسبات مربوط به هر دسته از شاخص ها به صورت مجزا انجام می شود. مقدار غلبه نیز برای ماتریس های تفاضلی محاسبه میشود و در پایان پس از محاسبه امتیاز ارزیابی گزینه ها، گزینه ها رتبه بندی می شوند.

مدل هایی که در مرز جبرانی و غیر جبرانی قرار می گیرند

• PERMUTATION

در این روش تعداد حالات رتبه بندی گزینه ها (جایگشت ها) مشخص می شود و هر رتبه بندی مورد آزمایش قرار می گیرد و نهایتا مناسب ترین آنها برای رتبه بندی انتخاب می گردد.

QUALIFLEX

در این روش ابتدا جایگشت های مختلف گزینه ها تشکیل می شود. در مرحله بعدی گزینه ها براساس شاخص ها رتبه بندی می شوند به این ترتیب که اگر گزینه ای در شاخصی از بقیه بهتر است عدد ۱ و به همین ترتیب سایر گزینه ها طبقه بندی می شود. مقادیر غالب و غیر غالب از طریق مقایسه جایگشت و رتبه بندی به دست می آیند. براینده مراحل فوق را با داشتن اطلاعات شاخص ها و جایگشت ها در ماتریسی گرد آورده و جمع مقادیر مربوط به هر جایگشت را که مشخص کننده اولویت جایگشت هاست محاسبه می کنیم.

تصمیم گیری چند معیاره گروهی

تصمیم‌گیری گروهی

- بسیاری از تصمیمات به صورت گروهی اتخاذ می‌شود.
- تصمیم‌گیری گروهی اعتبار، دقت و کارایی تصمیمات را افزایش می‌دهد.
- مشکل اصلی تصمیم‌گیری گروهی نرسیدن به اجماع به دلیل:
 - مشارکت افراد در رده‌های مختلف سازمانی
 - مشارکت افراد متخصص در رشته‌های مختلف
 - مشارکت افراد با توانمندی و خبرگی متفاوت
 - مخفی کردن نظرات و یا سعی در تحمیل نظرات

ترکیب روشهای تصمیم گیری چندمعیاره

مثال:

توسط چهار نفر به صورت زوجی مقایسه شده $C1, C2, C3$ سه عنصر
است و ماتریس های مقایسه زوجی آنها به صورت زیر آمده است، وزن گروهی
برای این مقایسات چقدر است؟ نظر فرد چهارم چه مقدار از نظر جمعی
فاصله دارد؟

		نفر چهارم			Aw	λ_{max}
		C1	C2	C3		
	C1	1	6	2	2.202538	3.877388
	C2	0.1667	1	0.2	0.335182	1.739884
	C3	0.5	5	1	1.486562	6.211948
وزن جمعی		0.568	0.1926	0.239		3.943073

روش های ادغام

- در تصمیم گیری های مهم، تصمیم گیرندگان به یک روش برای رتبه بندی گزینه ها محدود نمی کنند.
- امکان دارد یک مساله با چند روش SAW، TOPSIS و ELECTRE و ... حل شود.
- سوال: اگر رتبه بندی این روش ها تفاوت هایی داشته باشد چگونه می توان به یک رتبه بندی واحد رسید.
- چند روش در این زمینه مطرح است: روش میانگین رتبه ها، روش BORDA ، روش Copeland و روش رتبه بندی جزئی.

روش میانگین رتبه ها

این روش گزینه ها را بر اساس میانگین رتبه های بدست آمده از روش های مختلف، اولویت بندی می کند، مثال:

طرح مثال در کلاس

$$A2 > A1 > A3 > A4$$

روش BORDA

در این روش گزینه ها دو به دو مقایسه می شوند، اگر تعداد روش هایی که گزینه A را بر گزینه J ترجیح می دهند بیشتر از تعداد روش هایی بود که گزینه J را بر A، آنگاه در سطر A و ستون J ماتریس مقایسات زوجی حرف M و در غیر اینصورت حرف X را قرار می دهیم، تعداد حرف های M هر سطر رتبه گزینه مربوطه را مشخص می کند. مثال:

طرح مثال در کلاس

$$A1=A2>A3>A4$$

روش Copeland

این روش در تکمیل روش BORDA است و بر اساس اختلاف بردها و باختها رتبه بندی نهایی را مشخص می کند. مثال::

طرح مثال در کلاس

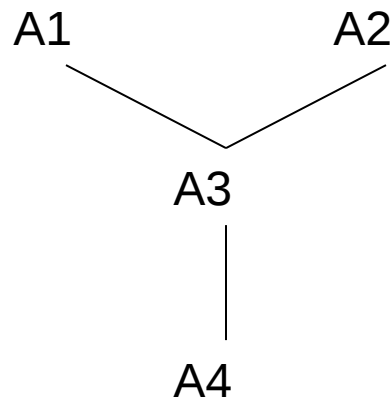
$$A1=A2>A3>A4$$

روش رتبه بندی جزئی

- در این روش رتبه بندی قابل استخراج از روش های مختلف به صورت یک گراف نمایش داده می شود

$A1 > A2 > A3 > A4$

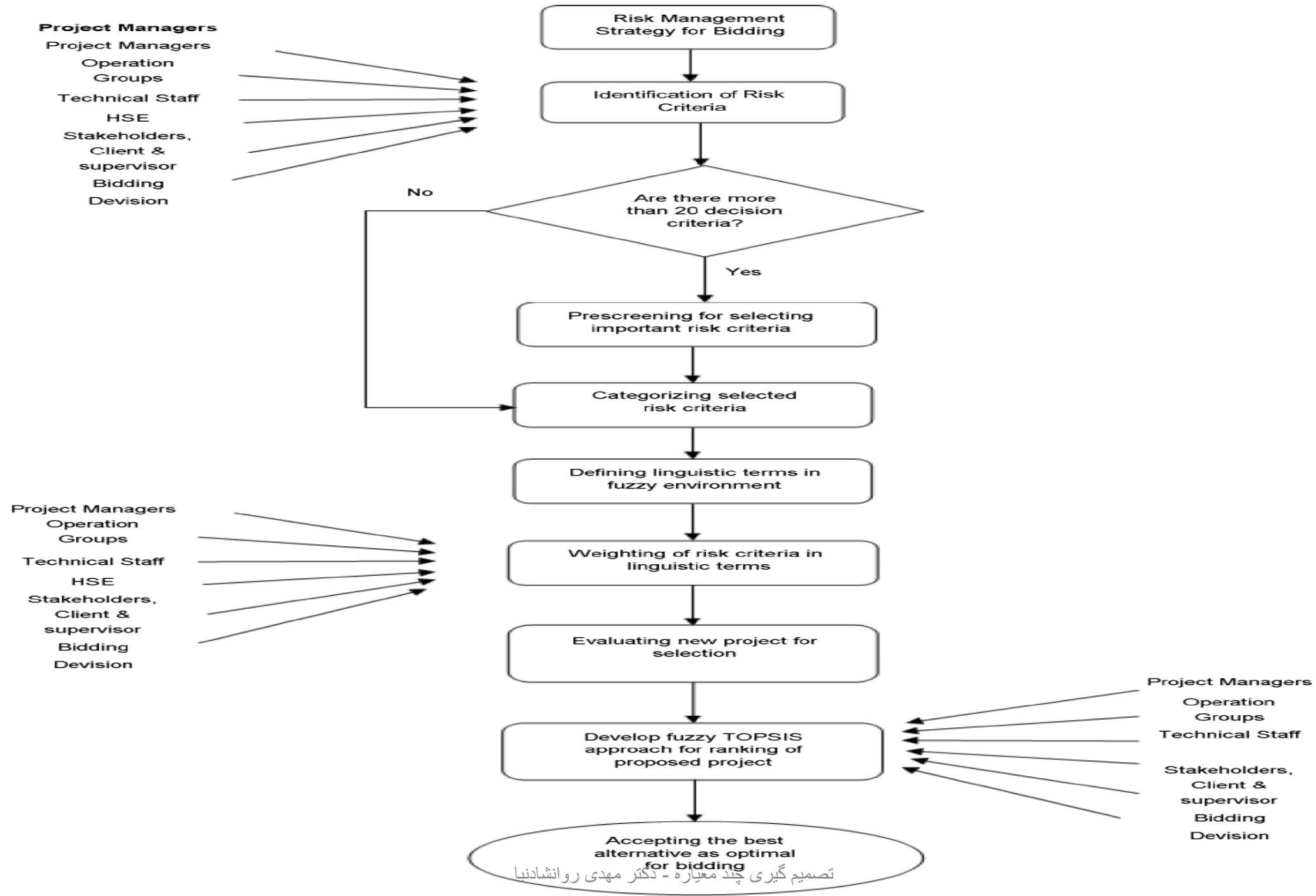
$A2 > A1 > A3 > A3$

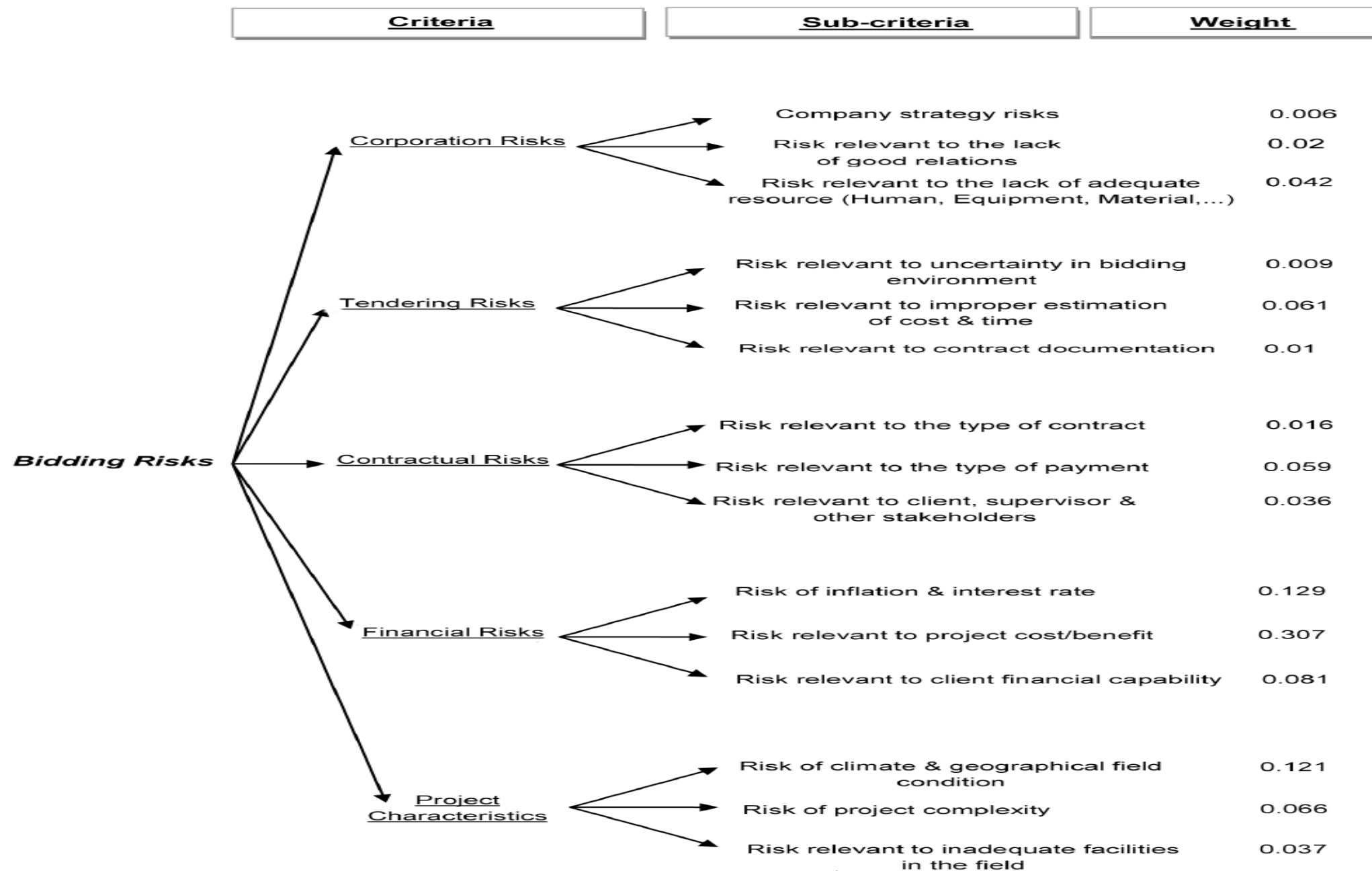


تصمیم گیری چند معیاره فازی

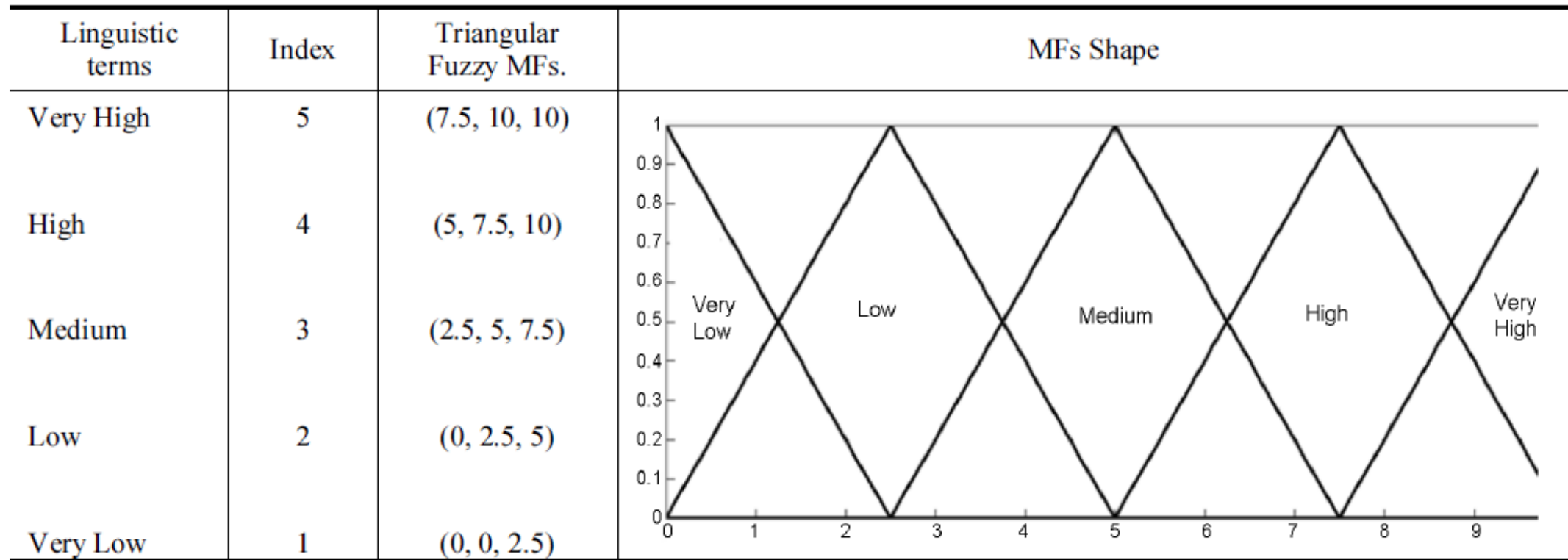
مثال: تصمیم گیری فازی تاپسیس

- SEMI-IDEAL BIDDING VIA A FUZZY TOPSIS PROJECT EVALUATION 5 FRAMEWORK IN RISKY ENVIRONMENTS
- JOURNAL OF CIVIL ENGINEERING AND MANAGEMENT
- ISSN 1392-3730 print/ISSN 1822-3605 online
- 2013





اعداد فازی مورد استفاده



GUI نمونه خروجی

PSCRM Project Selection Considering Risk Management

Corporation Risks

Attribute	Attribute Weight	Project NO.1	Project NO.2	Project NO.3
Company Strategy Risk	06	Medium	Low	High
Risk Relevant to Lack of Good Relations	02	Low	Medium	Low
Risk Relevant to Adequate sources (Humans, ...)	42	High	Medium	Very Low

Financial Risks

Attribute	Attribute Weight	Project NO.1	Project NO.2	Project NO.3
Risk of Inflation & Interest Rate	29	High	High	High
Risk of Project Cost/Benefit	07	Medium	Low	Very Low
Risk Relevant to Client Financial Capability	01	Low	High	Medium

Tendering Risks

Attribute	Attribute Weight	Project NO.1	Project NO.2
Risk Relevant to Uncertainty	08	High	Low
Risk Relevant to Improper Estimation of cost & time	01	Medium	High
Risk Relevant to Contract Documentation	01	High	Low

Project Characteristics Risks

Attribute	Attribute Weight	Project NO.1	Project NO.2	Project NO.3
Geographic and Climate Condition Risks	21	High	Medium	High
Risk of Project Complexity	06	High	High	Very Low
Risk Relevant to Inadequate Facilities in Field	03	Very Low	Medium	High

Contractual Risks

Attribute	Attribute Weight	Project NO.1	Project NO.2	Project NO.3
Risk Relevant to Type of Contract	016	Medium	Very High	Low
Risk Relevant to Payment	09	Medium	Very High	Medium
Risk Relevant to Client, Supervisor & other Stakeholders	036	Very High	Low	Medium

Projects Ranking

Rank The Projects

Rank of Project	Project Name	Index of TOPSIS
Grade 1	Project NO.2	0.726039
Grade 2	Project NO.1	0.496205
Grade 3	Project NO.3	0.180832



تصمیم‌گیری چند معیاره - دکتر مهدی روانشادنیا

با تشکر از توجه شما