بخش ششم: برنامه ریزی خطی

دکتر مهدی روانشادنیا

دانشیار مهندسی و مدیریت ساخت

سرفصل های بخش پنجم: برنامه ریزی خطی

- کلیات
- مدل سازی ریاضی خطی (مفاهیم، متغیرهای تصمیم، مثال)
- رویه حل مدل های ریاضی خطی
  - روش هندسی
  - روش سیمپلکس (ریاضیات، مفاهیم، و الگوریتم)
  - روش Big M
  - روش دوفازی
  - روش سیمپلکس دوگان (ریاضیات، قضایا، و الگوریتم)
- حالت های خاص مدل های ریاضی خطی
- تحلیل حساسیت مدل های ریاضی خطی

فصل اول

کلیات

تاریخچه تحقیق درعملیات

- در طول جنگ جهاني دوم توسط دانشمندان انگليسي توسعه يافت.

- پس از جنگ وارد دنياي تجارت گرديد.

- در اوایل دهه 1950 در امریکا کارشناسان OR وارد بخش صنعت شدند.

- ابداع روش سیمپلکس به سال 1947 توسط جرج دنتزیک (مشاورریاضی اداره نظارت و بازرسی نیروی هوایی ایالات متحده آمریکا) برمي گردد.

- الگوریتم سیمپلکس به دلیل کارایی بالا درحل مسائل مدیریتی و قابلیت کامپیوتری شدن به سرعت توسعه یافته است.

تحقيق در عمليات

به عنوان کاربرد يک رويکرد علمي به منظور بهينه سازی.

با عناويني همچون علم مديريت، روشهاي مقداري، تحليل مقداري و علم تصميم گيري نيز شناخته مي شود.

گرچه نوپاست ولي در حوزه صنعت بازرگاني شناخته شده است.

در انواع مختلفي از سازمانهاي دولتي-خدماتي-نظامي....کاربرد دارد.

فنون رياضي به کار برده در ان با رايانه قابل حل هستند.

چيزي بيش از مجموعه فنون رياضي است.

نگاهي سيستماتيك و منطقي به مسايل مديريتي دارد.

تعريف تحقيق در عمليات

1- مجموعه اي از روشهاي علمي كه براي شناخت مسائل درون سيستم به كار مي روند و در پي جواب بهينه هستند.

2- كاربرد روش هاي علمي براي مطالعه و بررسي فعاليت ها و عمليات پيچيده در سازمان هاي بزرگ.

3- كاربرد روش علمي براي تحليل و حل مسائل و تصميمات مديريتي.

ويژگي هاي تحقيق در عمليات

1- تمركز اصلي روي تصميم گيري مديران

2- رويكرد علمي

3- ديدگاه سيستمي

4- ميان رشته اي بودن

5- استفاده از مدل هاي رياضي

6- استفاده از رايانه

دلايل استفاده ازمدل هاي رياضي

1- تعريف موقعيت هاي خيلي پيچيده

2- شبيه سازي زمان عمليات واقعي

3- امكان پذيري آزمايش سيستم

4- كاهش هزينه

5- محاسبه ريسك

6- فراهم كردن زمينه يادگيري

طبقه بندي مدل هاي رياضي

1- قطعي

2- احتمالي

3- فازی

3- تركيبي

رشته های مرتبط باعلم تحقیق در عملیات

- ریاضیات (محض و کاربردی)
- مهندسی صنایع
- مدیریت (صنعتی، بازرگانی، دولتی، IT)
- برق
- معدن
- عمران
- ...

فصل دوم

مدل سازی ریاضی خطی(مفاهیم، متغیرهای تصمیم، مثال)

هدف

آشنايي بامفاهيم مدل سازی رياضی خطی

تعريف اجزائ برنامه ريزی رياضی (متغيرهای تصميم، تابع هدف، محدوديت)

آشنايی با صورت كلي برنامه ريزي خطي

مثال هايی در زمينه مدل سازی رياضی خطی

گام های اساسي در مدل سازی

1- تعریف مسئله.

2 - فرموله کردن مسئله در قالب یک مدل.

3 - حل مدل با استفاده از فنی خاص.

گام هاى اساسي در مدل سازى رياضى

1- تعريف مسئله در چهارچوب روابط منطقى و رياضى.

2 - فرموله كردن مسئله در قالب يک مدل رياضي.

3 - حل مدل با استفاده از فن رياضي.

اجزای یک مدل ریاضی

1-متغیرهاي تصمیم

2- تابع هدف

3- محدودیت هاي مدل.

متغيرهاي تصميم

نمادهاي رياضي برای بيان سطح فعاليت موسسه

تابع هدف

تابع هدف مدل، یک رابطه رياضي که هدف موسسه را در قالب متغيرهاي تصميم توصيف مي کند. تابع هدف همواره به صورت حداکثرسازی يا حداقل سازي بيان مي شود (توابع هدف قابل تبديل شدن به صور مختلف می باشند).

محدوديت هاي مدل

محدوديت هاي مدل بيانگر روابط بين متغيرهاي تصميم هستند. محدوديت ها به وسيله محيط عملياتي كه اغلب ناشي از محدوديت منابع و يا سياست گذاري هاي داخلي موسسه اند، به موسسه تحميل مي شوند. محدوديت ها در رياضيات عموما به صورت روابط كوچكتر،كوچكتر مساوی، بزرگتر، بزرگتر مساوی، مساوی، يا شرطی بيان می شوند.

مراحل فرموله سازي يک مدل رياضی

1 - تعريف متغيرهاي تصميم

2 - فرموله كردن تابع هدف

3- فرموله كردن محدوديت ها

مثال اول

شركتي مي خواهد براي حداكثر سازي سود خود از توليد 3 محصول و براساس محدوديت هاي منابع با توجه به واقعيتهاي جدول زير برنامه ريزي نمايد.

منابع	محصول1	محصول2	محصول3	مقدار
نيروي كار(ساعت/ واحد)	5	2	4	240 ساعت
مواد(كيلوگرم/ واحد)	4	6	3	400كيلوگرم
سود هر واحد	3	5	2	---

حل مسئله - گام اول

تعريف متغيرهاي تصميم:

- مقدار تولید از محصول اول: X_1
- مقدار تولید از محصول دوم: $X2$
- مقدار تولید از محصول سوم: X_3

حل مسئله- گام دوم

فرموله کردن تابع هدف با توجه به تعریف متغیرهاي تصميم و حداكثر سازي سود:

$$Maximize\ Z=3x_1+5x_2+2x_3$$

حل مسئله- گام سوم

فرموله کردن محدودیت ها با توجه به اطلاعات موجود در جدول يعني محدوديت در ساعت كار و همچنين مواد اوليه داريم:

محدوديت اول

$$5x_1+2x_2+4x_3 < 240$$

محدوديت دوم

$$4x_1+6x_2+3x_3 < 400$$

محدوديت هايي كه بيان كننده غير منفي بودن متغيرهاي تصميم هستند.

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$X_3 \geq 0$$

خلاصه مدل ساخته شده

$$\text{Max } Z=3x_1+5x_2+2x_3$$

s.to:

$$5x_1+2x_2+4x_3 < 240$$

$$4x_1+6x_2+3x_3<400$$

$$X_1,x_2,x_3> 0$$

مثال دوم

یک شرکت چوب بري بايد سفارش هايي، به ابعاد زير تهيه و برای متقاضيان ارسال نمايد.

ابعاد چوب هاي سفارشي	مقدار سفارش
1*2	1300
1*4	100
2*2	700

سفارشات بايد از تخته هاي استاندارد به ابعاد 2*4 تهيه شوند.

چوب بري برآوردن سفارشات مي خواهد حداقل تخته استاندارد مورد استفاده قرار گيرد.

حل مسئله- گام اول

تعريف متغير تصميم

تعداد تخته هاي استانداردي که داراي طريقه اول برش هستند: X_1

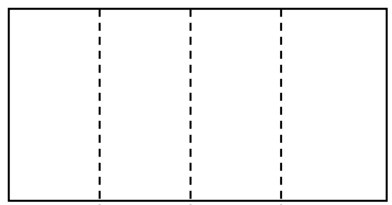
تعداد تخته هاي استانداردي که داراي طريقه دوم برش هستند: X_2

تعداد تخته هاي استانداردي که داراي طريقه سوم برش هستند: X_3

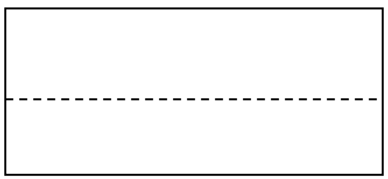
تعداد تخته هاي استانداردي که داراي طريقه چهارم برش هستند: X_4

تعداد تخته هاي استانداردي که داراي طريقه پنجم برش هستند: X_5

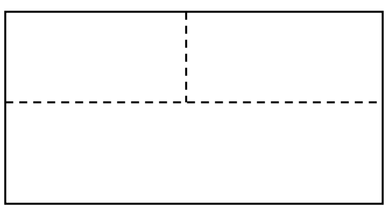
متغیر تصمیم براساس تعداد برش هائي که از یک تخته استاندارد تهیه مي شوند، تعریف میگردد.



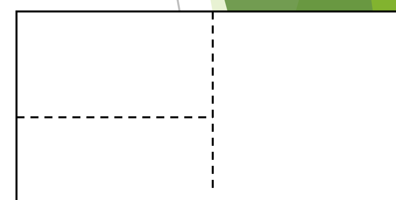
طریقه اول برش



طریقه دوم برش



طریقه سوم برش



طریقه چهارم برش

طریقه پنجم برش

حل مسئله- گام دوم

فرموله سازي تابع هدف

هدف مسئله، حداقل سازي تعداد تخته هاي استاندارد مورد استفاده است. پس:

$$\text{Minimize } Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

حل مسئله- گام سوم

فرموله سازي محدوديت ها

تعداد محدوديت هاي كار كردي مدل به اندازه تعداد طريق سفارش داده شده مي باشد پس مدل داراي 2 محدوديت است.

$$4X_1+2X_3+2X_4 \geq 1300$$

$$2X_2+x_3+ \geq 1000$$

$$X_4+2X_5 \geq 700$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 \geq 0$$

خلاصه مدل

$$Min\ Z=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$$

S .to

$$4X_1+2X_3+2X_4 \geq 1300$$

$$2X_2+X_3 \geq 1000$$

$$X_4+2X_5 \geq 700$$

$$X_5 , X_4 , X_3 , X_2 , X_1 \geq 0$$

مثال سوم

ردی میکس رنگ های داخلی و خارجی را از دو نوع ماده ی اولیه ی M_1 و M_2 تولید می کند.

	مقدار مواد اولیه ی رنگ خارجی	مورد نیاز برای هر تن از رنگ داخلی	حد اکثر ماده ی اولیه که روزانه قابل دسترس است (تن)
ماده اولیه ی **M1**	۶	۴	۲۴
ماده اولیه ی **M2**	۱	۲	۶
سود هر تن (هزار دلار)	۵	۴	

برآوردی که از بازار شده است، نشان می دهد که حداکثر تقاضای روزانه برای رنگ داخلی به 2 تن محدود است. به علاوه، تقاضای رنگ داخلی ممکن نیست بیش از یک تن از تقاضای رنگ خارجی تجاوز کند. ردی میکس می خواهد تولید بهینه ی توام رنگ های داخلی و خارجی را که مجموع سود روزانه را ماکسیمم می کند

حل مسئله- گام اول

x_1: مقدار تولید روزانه ی رنگ خارجی بر حسب تن

x_2: مقدار تولید روزانه ی رنگ داخلی بر حسب تن

حل مسئله- گام دوم

یک هدف منطقی برای این شرکت, افزایش هر چه بیشتر(ماکسیمم) مجموع سود روزانه از رنگ های داخلی و خارجی است.

$$Max(C) = 5x_1 + 4x_2$$

حل مسئله- گام سوم

این بخش استفاده از مواد اولیه و مقدار تقاضا را محدود می کنند. محدودیت مواد اولیه بطور کلی به شکل زیر بیان می شود:

(حداکثر ماده ی اولیه ی قابل دسترس) $\leq$ (ماده ی اولیه ی لازم برای هر دو رنگ)

مصرف مقدار ماده ی اولیه ی M1= (بر حسب تن) $6x_1 + 4x_2$

مصرف مقدار ماده ی اولیه ی M2= (بر حسب تن) $1x_1 + 2x_2$

و با توجه به جدول موجودی روزانه ی مواد اولیه ی M1 و M2 به 24 و 6 تن محدود است، محدودیت های متناظر به این صورت مشخص می شود:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

- حداکثر تقاضای روزانه ی رنگ داخلی به 2 تن محدود است. $x_2 \le 2$
- تولید روزانه ی رنگ داخلی حداکثر یک تن بیشتر از رنگ خارجی است $x_2 + x_1 \le 1$

ودیت ضمنی مدل آن است که متغیر ها نباید منفی باشند.

خلاصه مدل

$$Max\, c = 5x_1 + 4x_2$$

$$st$$

$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$

$$-x_1 + x_2 \le 1$$

$$x_2 \le 2$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

برنامه ریزی خطی

تحقیق در عملیات

برنامه ریزی ریاضی

...

...

...

برنامه ریزی خطی

...

...

...

مفروضات برنامه ريزي خطي

1- فرض تناسب

2- فرض جمع پذيري

3- فرض غير منفی بودن

4- فرض معين بودن

فرض تنا سب

- هر فعاليت به تنهايي و مستقل از ساير فعاليت ها عمل مي كند.

- آهنگ تغيير يا شيب رابطه تابعي ثابت است.

پس: اگر متغير تصميم برابر مقداري تغيير كند، مقدار تابع نيز دقيقا به همان نسبت تغييرمي كند .

فرض جمع پذيري

روابط رياضي بين متغير ها در مدل به صورت جمع جبري بيان مي شوند. در مدل برنامه ريزي خطي، هيچ گاه حاصل ضرب دو متغير ديده نمي شود.

معين بودن

كليه پارامترهاي مدل عمومي برنامه ريزي خطي در افق برنامه ريزي مقادير ثابتي هستند .

فرض غیر منفی بودن

- در برنامه ریزی خطی فرض بر غیر منفی بودن همه متغیرهاست.

صورت کلی مدل ریاضی خطی

$$Max\, c = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$st$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j \qquad \forall j$$

$$x_i \ge 0 \qquad \forall i$$

مثال های متنوع

- مساله امتزاج (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)
- مساله تولید ترکیبی (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)
- مساله حمل و نقل (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)
- مساله شرکت تعاونی مزروعی (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)
- ماکزیمم محصول تکمیل شده (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)
- مساله کنترل موجودی (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)
- مساله تولید غذای دامی (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)
- استراتژی مالی مختلط (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)
- مساله تولید ترکیبی (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)

فصل سوم

رویه حل مدل های ریاضی خطی

روش هندسی

روش سیمپلکس (ریاضیات، مفاهیم، و الگوریتم)

روش Big M

روش دوفازی

روش سیمپلکس دوگان (ریاضیات، قضایا، و

اهداف فصل

- آشنائي با شيوه حل ترسيمي مسائل دو متغيره
- حل مسائل مختلف
- آشنائي با موارد خاص و تشخيص آنها با استفاده از رويه حل هندسی
- آشنائي با روش سيمپلكس براي حل مسائل دو و چند متغيره خطي
- آشنائي با موارد خاص و تشخيص آنها با استفاده از رويه حل سيمپلكس

هدف اساسي در هر سازمان

1-حداكثر سازي سود

2-حداقل سازي هزينه

روش ترسيمي حل مسئلهLP

مسائل حداكثر سازي

اين روش به مدل هايي محدود مي شود كه حداكثر سه متغير تصميم دارند. حل مدل هاي داراي بيش از 3 متغير تصميم به روش ترسيمي امكان پذير نيست. شيوه ترسيمي جنبه ي تئوريک دارد.

مثال

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z=40X_1+50X_2$$

s. to:

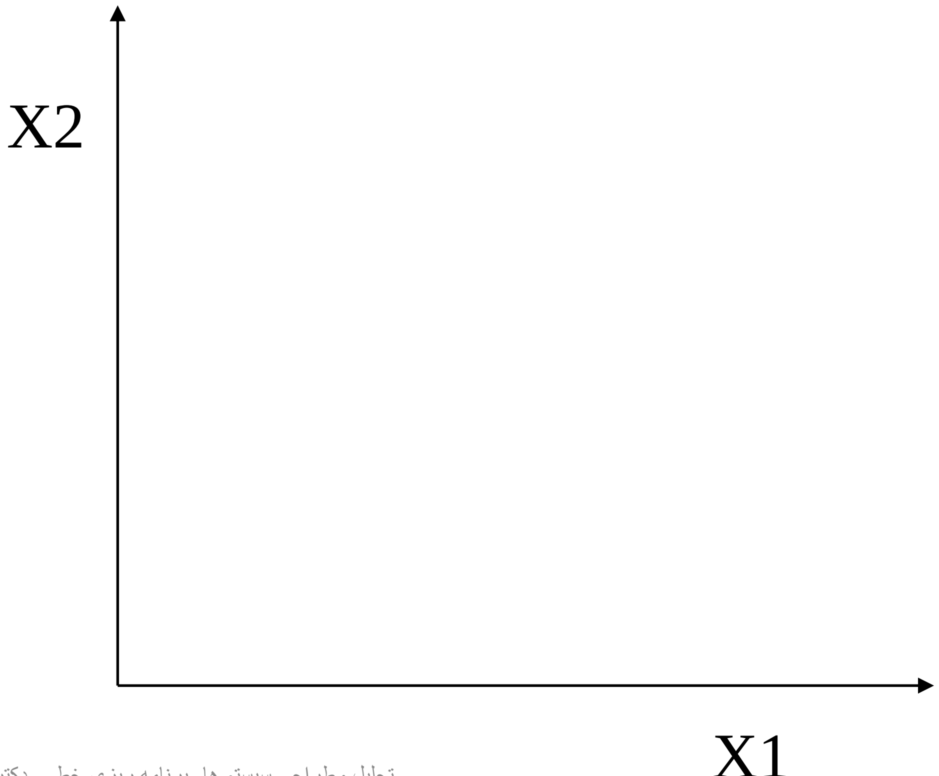
$$X_1+2X_2 \le 40$$

$$4X_1+3X_2 \le 120$$

$$X_1, X_2 \; 0$$

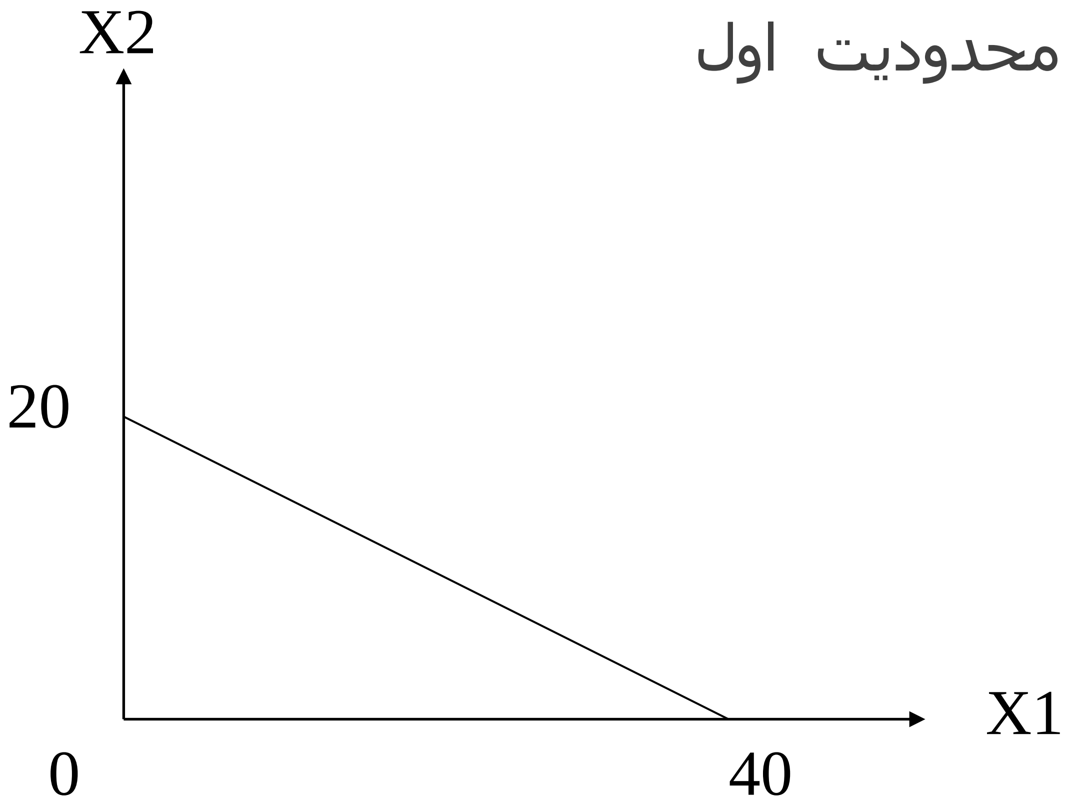
روش هندسي

براي حل مدل ابتدا بايد یک دستگاه مختصات تشکيل دهيم:



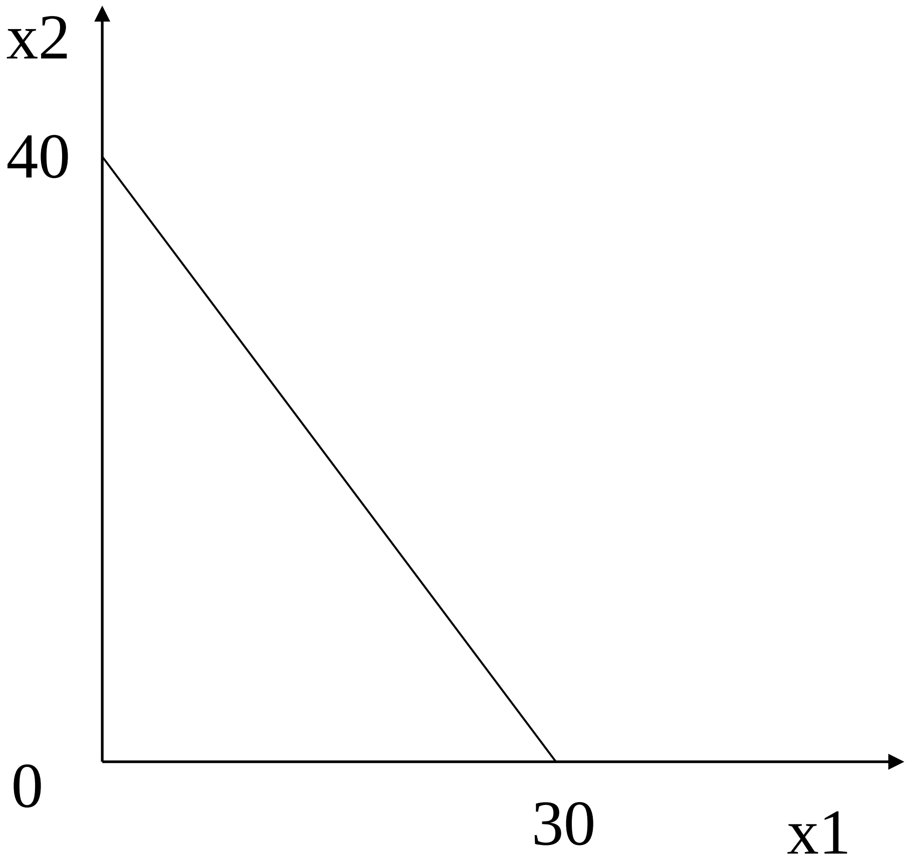
روش هندسي

رسم محدودیت اول



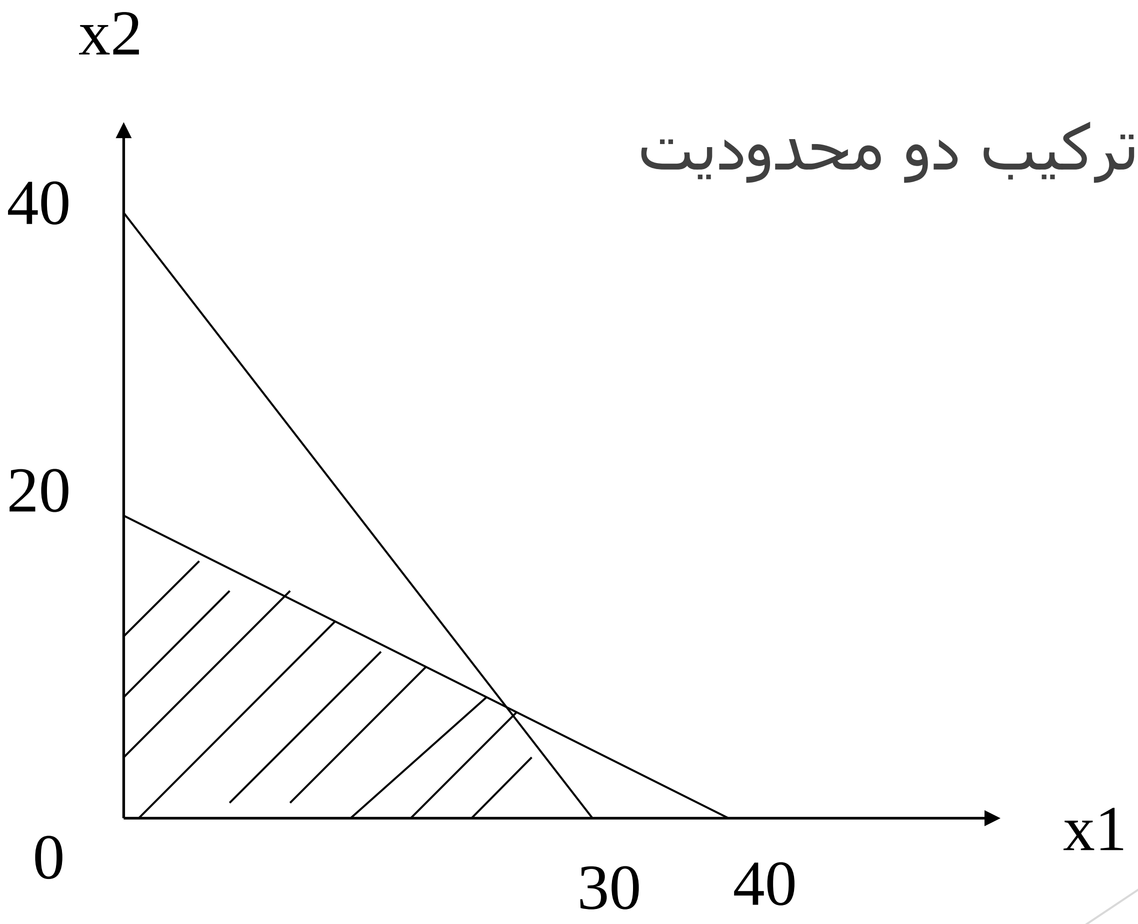
روش هندسي

رسم محدودیت دوم

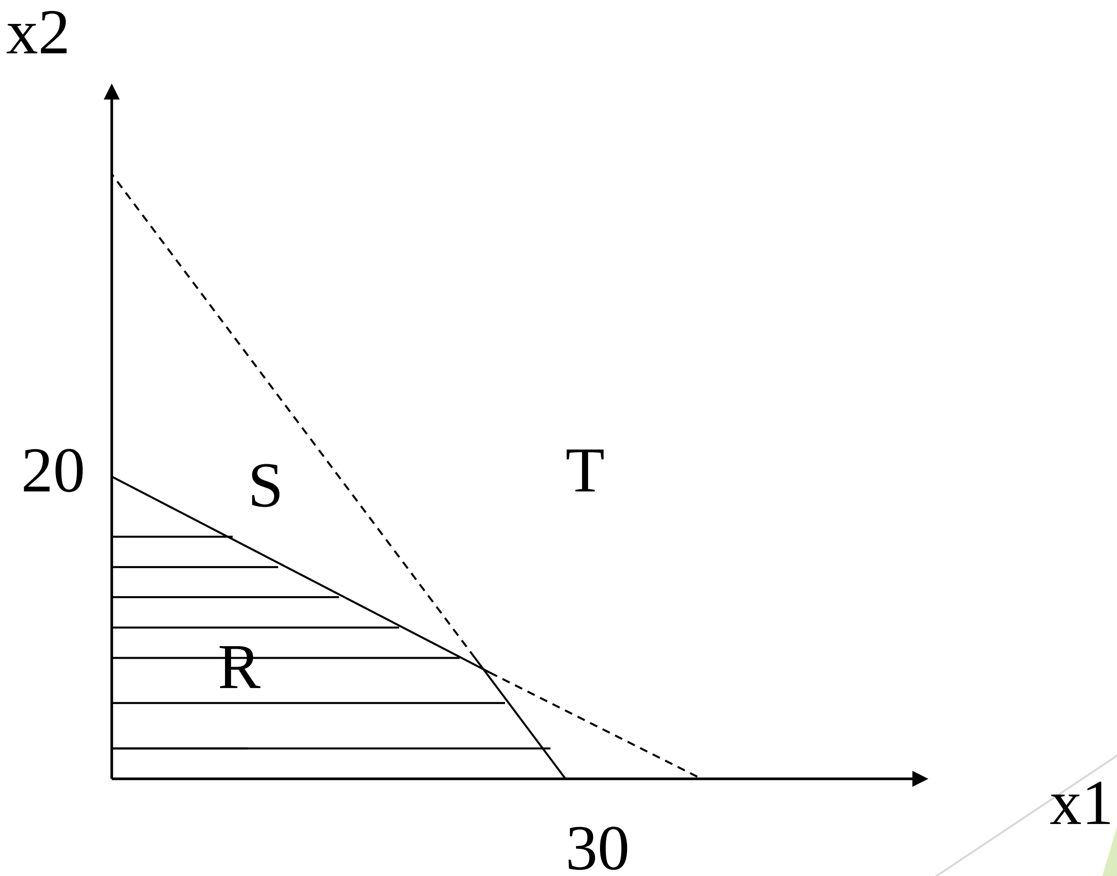


روش هندسي

- ترکیب دو محدودیت



روش هندسي



نقاط موجه-ناحیه موجه

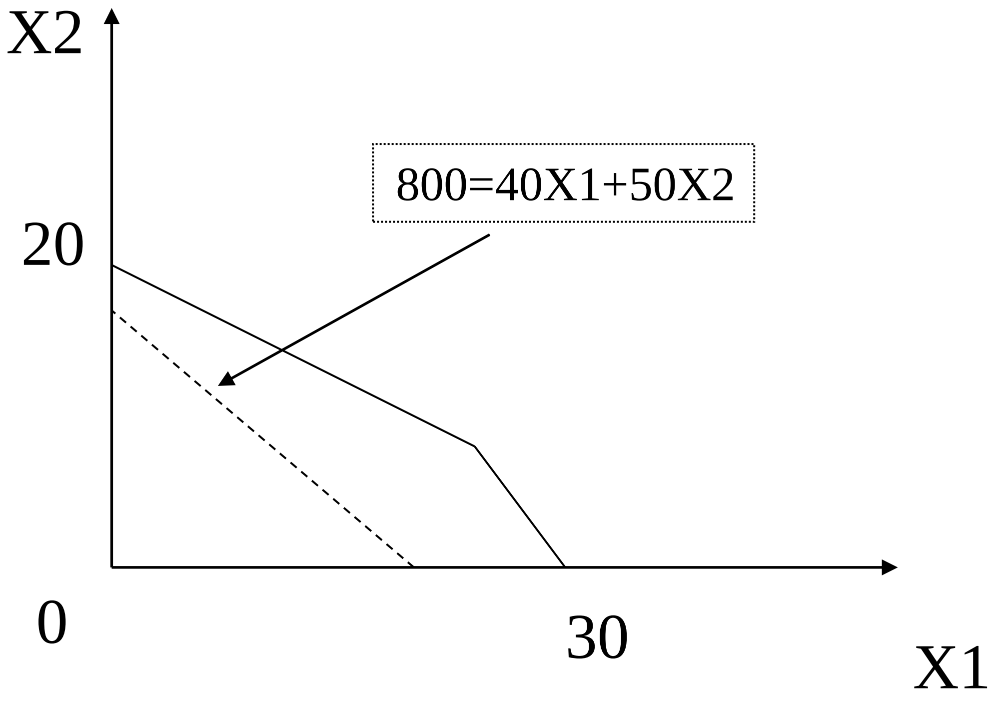
کلیه نقاطي که در هر دو محدودیت صدق مي کنند نقاط موجه مي باشند. و هر نقطه که یک محدودیت و یا هر دومحدودیت را نقض نماید غیر موجه است. ناحیه هاشور خورده ناحیه موجه نامیده مي شود.

تعیین نقطه بهینه

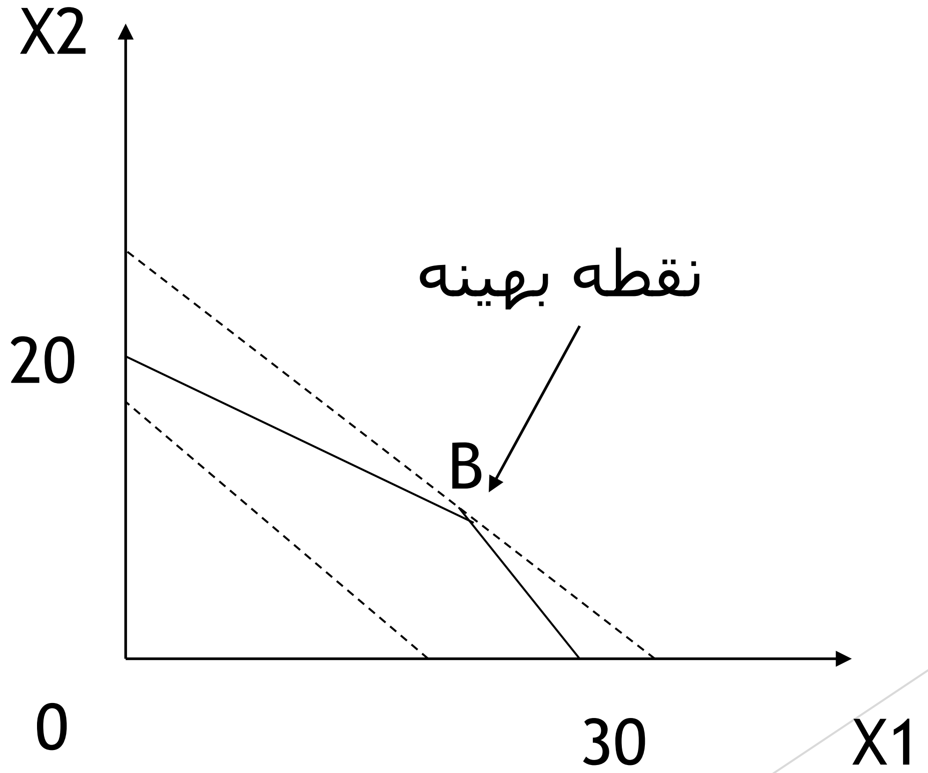
ترسیم تابع هدف به ازاء یک مقدار دلخواه.

حرکت خط تابع هدف به موازات خط اولیه رسم شده تا آخرین نقطه ناحیه موجه.

روش هندسي

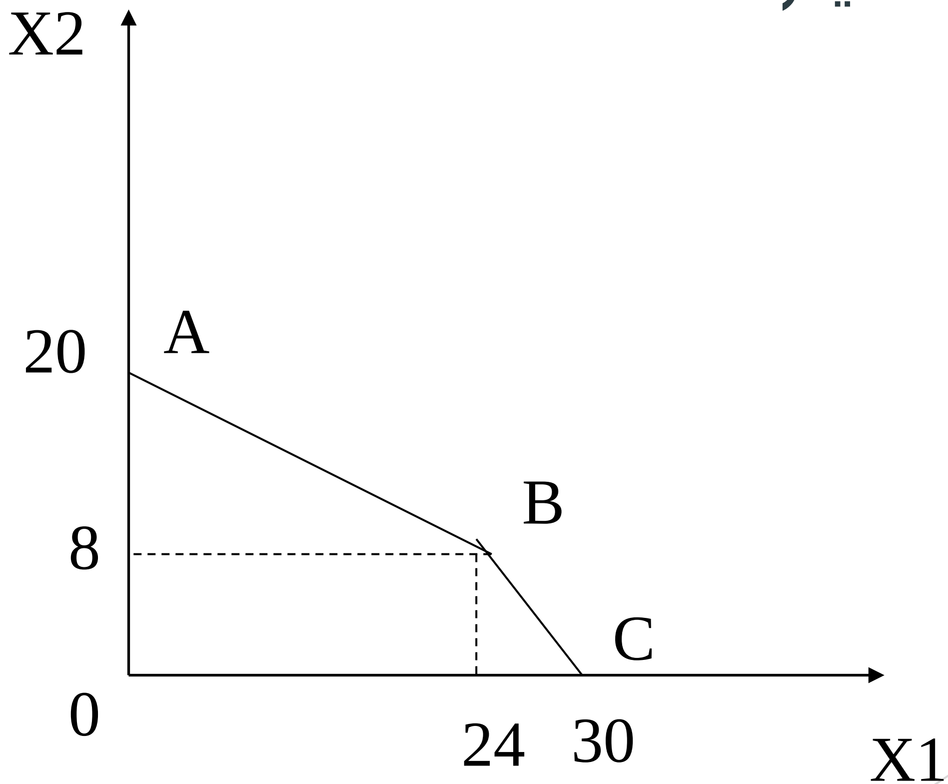


روش هندسي



روش هندسي

مقادير متغير هاي تصميم



خلاصه

نام گوشه	مشخصات نقاط	مقدار تابع هدف (Z)
A	(X1=0, X2=20)	Z=1000
B	(X1=24, X2=8)	Z=1360
C	(X1=30, X2=0)	Z=1200

گوشهB، بهترین گوشه و جواب بهینه است.

زیرا داراي بیشترین سود است.

جواب بهینه

1- در اکثر موارد جواب بهینه یکي از جواب هاي گوشه موجه است. (به جز موارد خاص)

2- تعداد جوابهاي گوشه موجه، متناهي است.

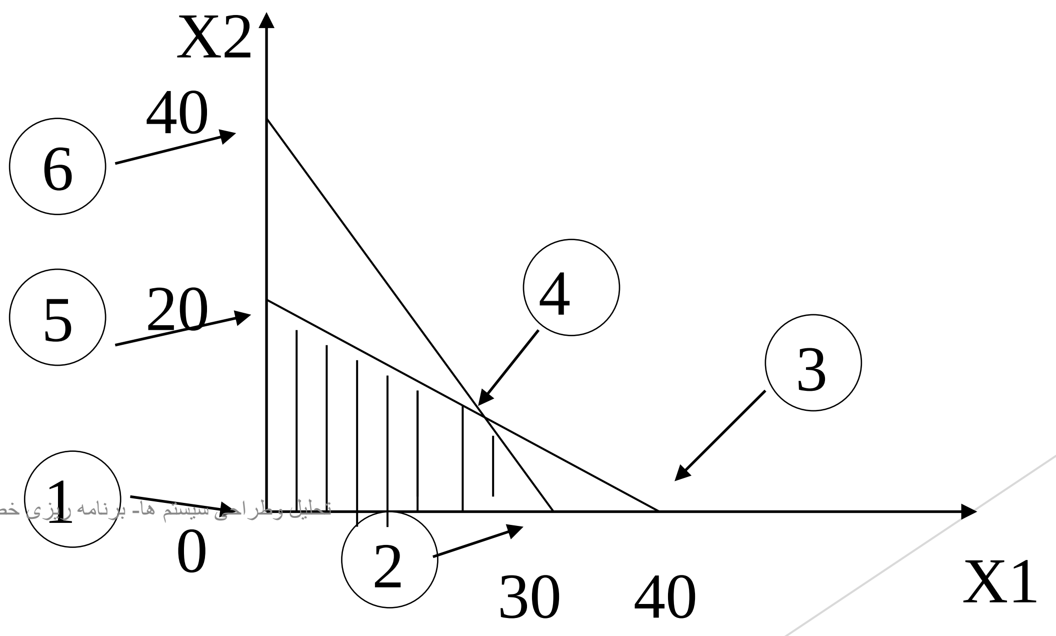
3- اگر یک گوشه موجه از تمام جوابهاي گوشه موجه مجاور خود بهتر باشد گوشه جواب بهینه است .

نمایش هندسي گوشه ها

هر گوشه موجه جواب همزمان یک دستگاه n معادله اي است که از بین حل معادله محدودیت ها انتخاب شده است.

تعداد ترکیبات برابر است با:

$$\frac{(m+n)!}{M!\,N!}$$



تعداد گوشه ها

$n=2 \quad , m=2$

$$\frac{4!}{2!\,2!}$$

تعداد گوشه ها= 6

خلاصه مراحل رويكرد ترسيمي حل مدل

1-رسم محدوديت هاي مدل در قالب یک معادله در دستگاه مختصات.

2-رسم تابع هدف به ازاي مقدار دلخواه.

3-انتقال خط تابع هدف براي تعيين نقطه بهينه، به سمت مناسب.

4-حل دستگاه معادلات مشترک گوشه بهينه.

روش حل ترسيمي- مسائل حداقل سازي

بر اساس توضیحات ارائه شده با یک مثال به حل مدل مي پردازيم.

$$\text{Min } Z=6X1+3X2$$

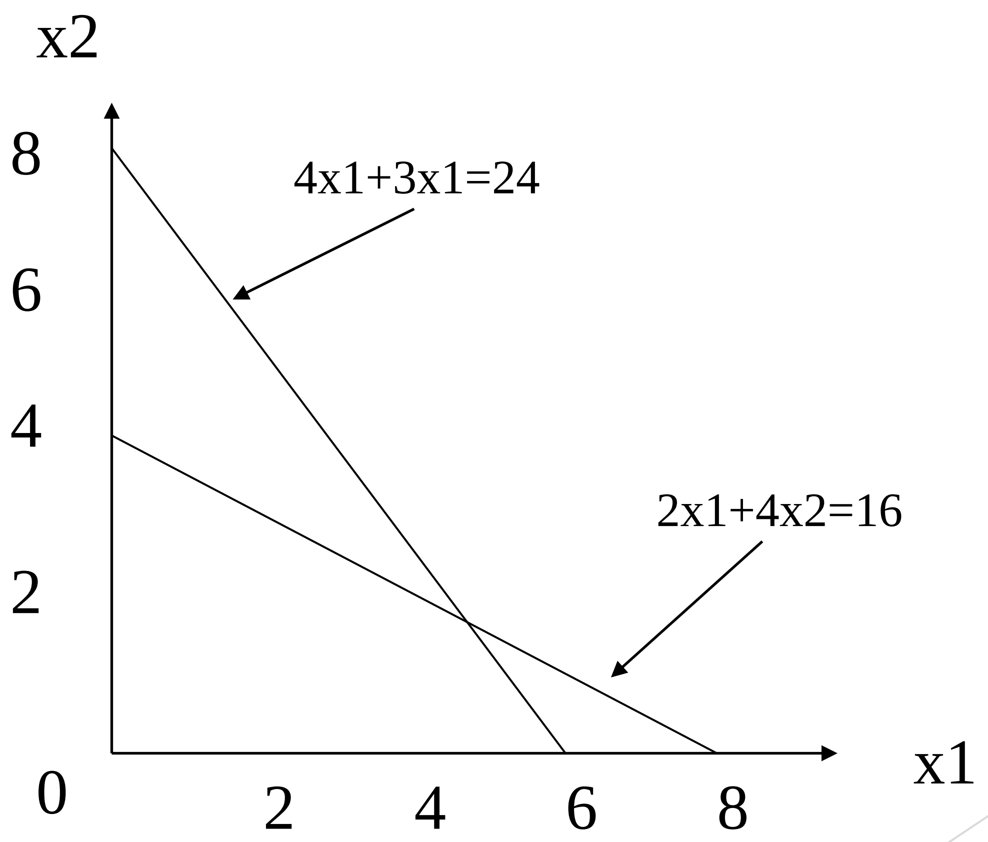
S .to:

$$2X1+4X2 \geq 16$$

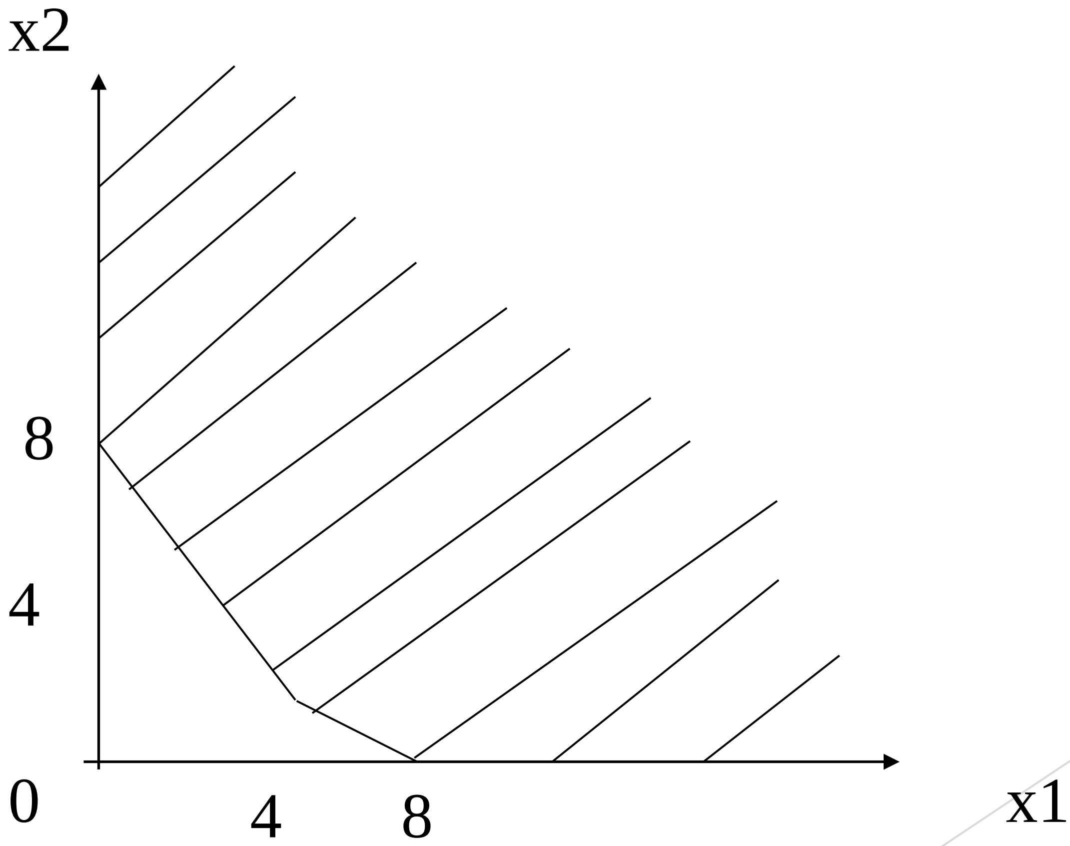
$$4X1+3X2 \geq 24$$

$$X1, X2 \geq 0$$

رسم همزمان معادلات محدودیت



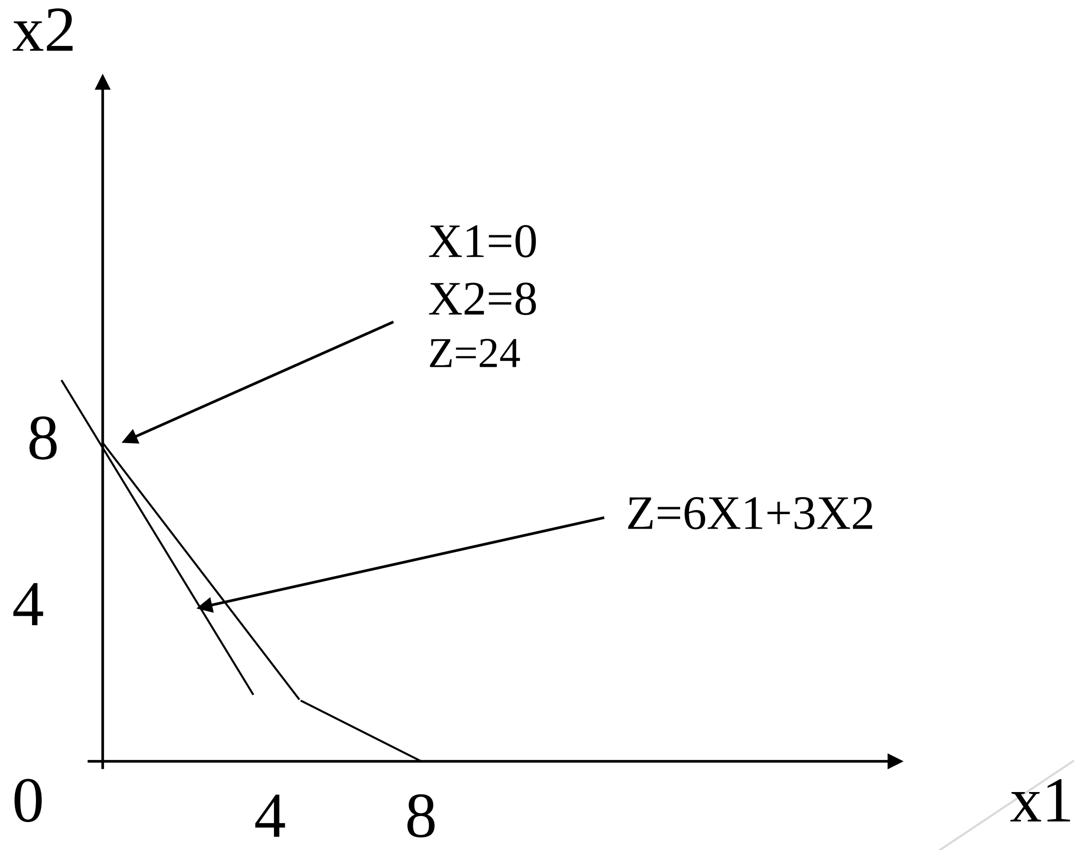
نا حیه موجه



توجه

به ازاء یک مقدار دلخواه خط تابع هدف رسم گرديده و با توجه به هدف مسئله که حداقل سازي است در يکي از نقاط پايين ناحيه جواب با توجه به شيب خط تابع هدف مماس مي گردد که آن نقطه بهينه است.

مثال نقطه بهینه عبارت است از



روش هندسي: موارد خاص در برنامه ريزي خطي

1) جواب بهینه چند گانه

2) فاقد ناحیه موجه(جواب)

3) جواب بیکران

4) جواب تبهگن (تباهیده)

1)جواب بهینه چند گانه

Max Z= 40X1 +30X2

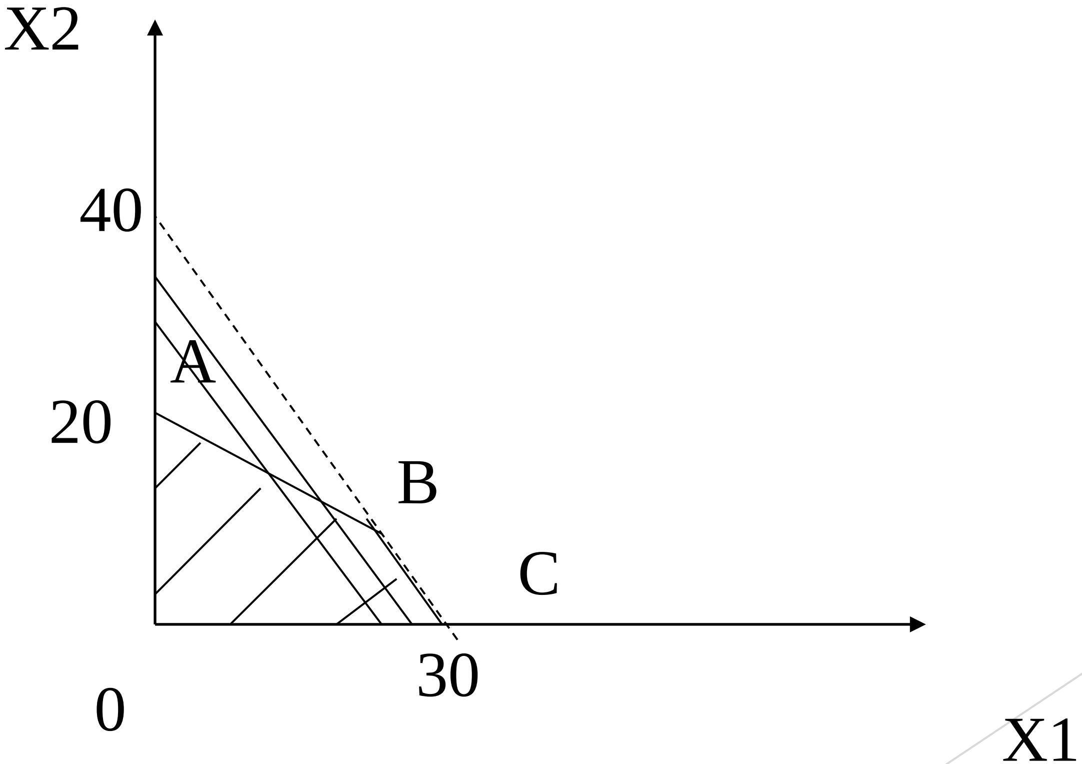
s .to:

X1+2X2≤ 40

4X1+3X2≤120

X1,X2 ≥0

رسم شکل



نتیجه

همان طور که دیده مي شود شیب خط تابع هدف و معادله محدودیت دوم یکسانند. پس کلیه نقاط روي پاره خط جزء نقاط بهینه مدل قراردارند.

2) فاقد ناحیه موجه (جواب)

Max $Z=5X1+3X2$

s. to:

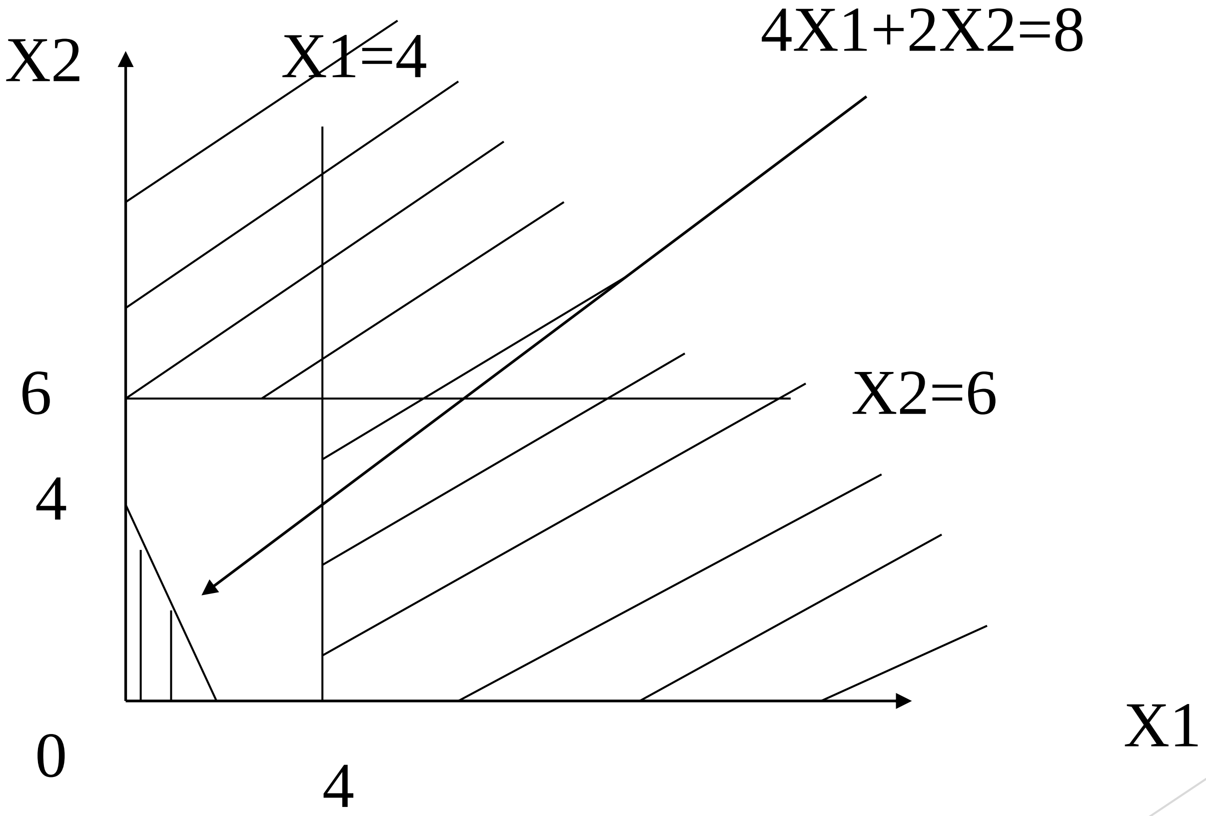
$2X1+2X2 \leq 8$

$X1 + 0 \geq 4$

$0 + X2 \geq 6$

$X1, X2 \geq 0$

رسم شکل مدل



جواب

با توجه به شكل بين محدوديت هاي اول با دوم و سوم اشتراكي وجود ندارد. پس هيچ نقطه اي كه در هر سه محدوديت صدق كند يافت نمي شود. يعني مسئله جواب ندارد.

3) جواب بیکران

MAX Z=4X1+2X2

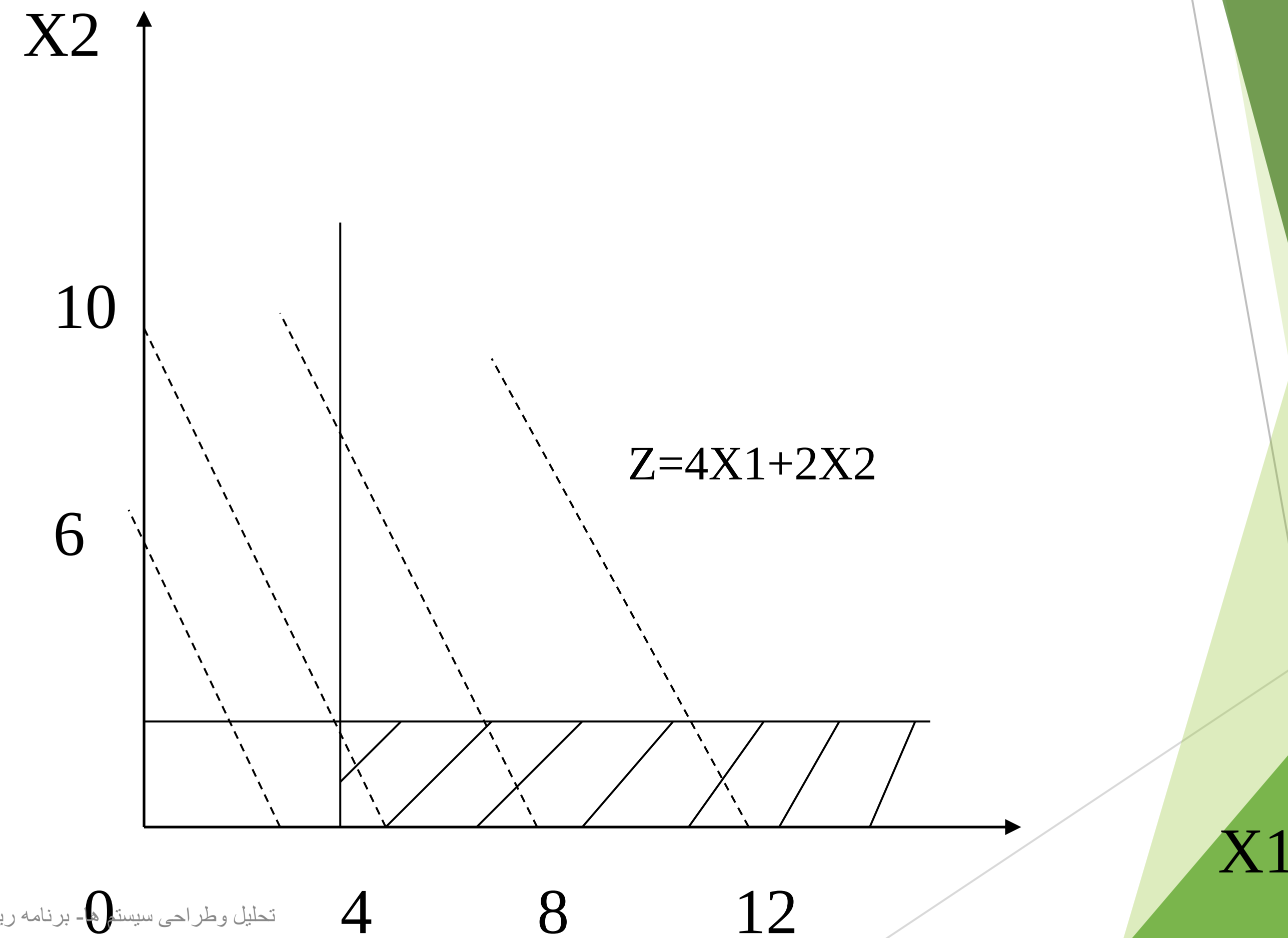
S.TO

$X1 \geq 4$

$X2 \leq 8$

$X1,X2 \geq 0$

رسم شکل



جواب

- شکل بیانگر ناحیه موجه و ارتباط آن با خط تابع هدف است که بدون هیچ حد و مرزي مي تواند در فضاي بیکران جواب موجه رسم شود.

مثال

Max $Z=6x1-2x2$

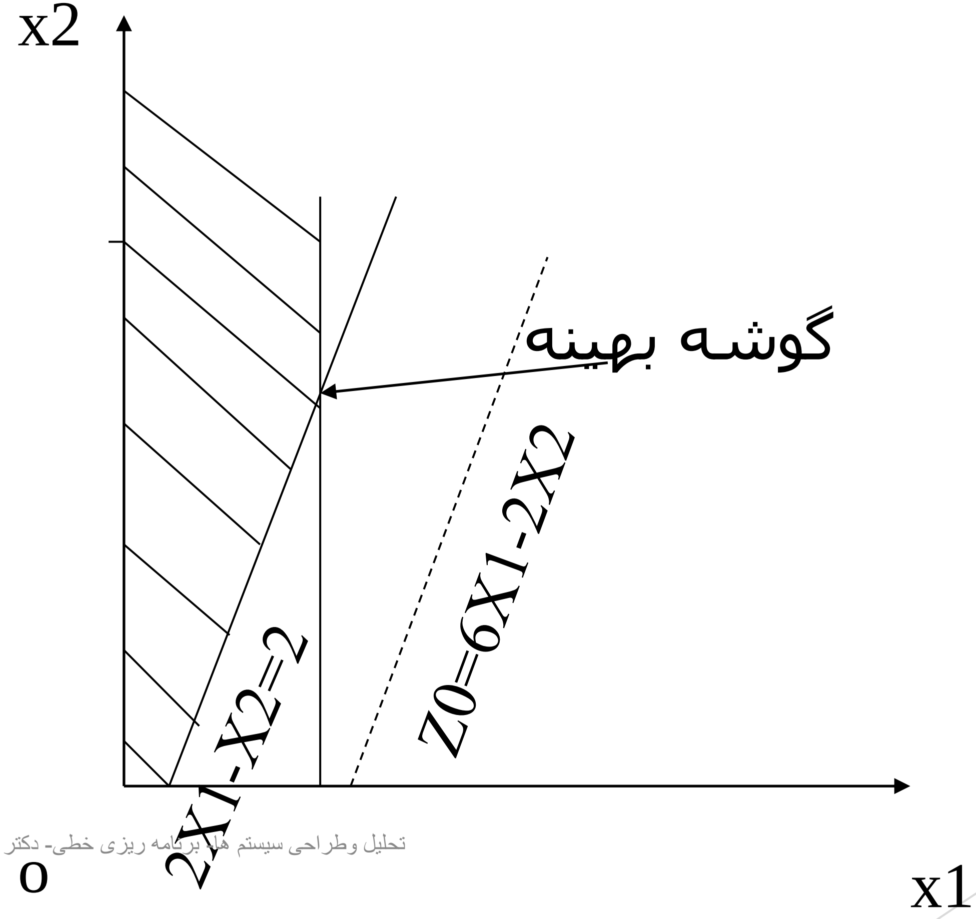
S .to:

$2x1-x2<2$

$X1 \quad <4$

$X1,x2>0$

نکته: لزوما فضای بیکران جواب بیکران را تداعی نمی کند.



4) جواب تبهگن

براي تشكيل هر گوشه، دو معادله كافيست.

اگر گوشه اي بر اثر تلاقي بيش از دو معادله تشكيل شده باشد آن گوشه تبهگن است.

مثال

Max z=4x1+6x2

s. to:

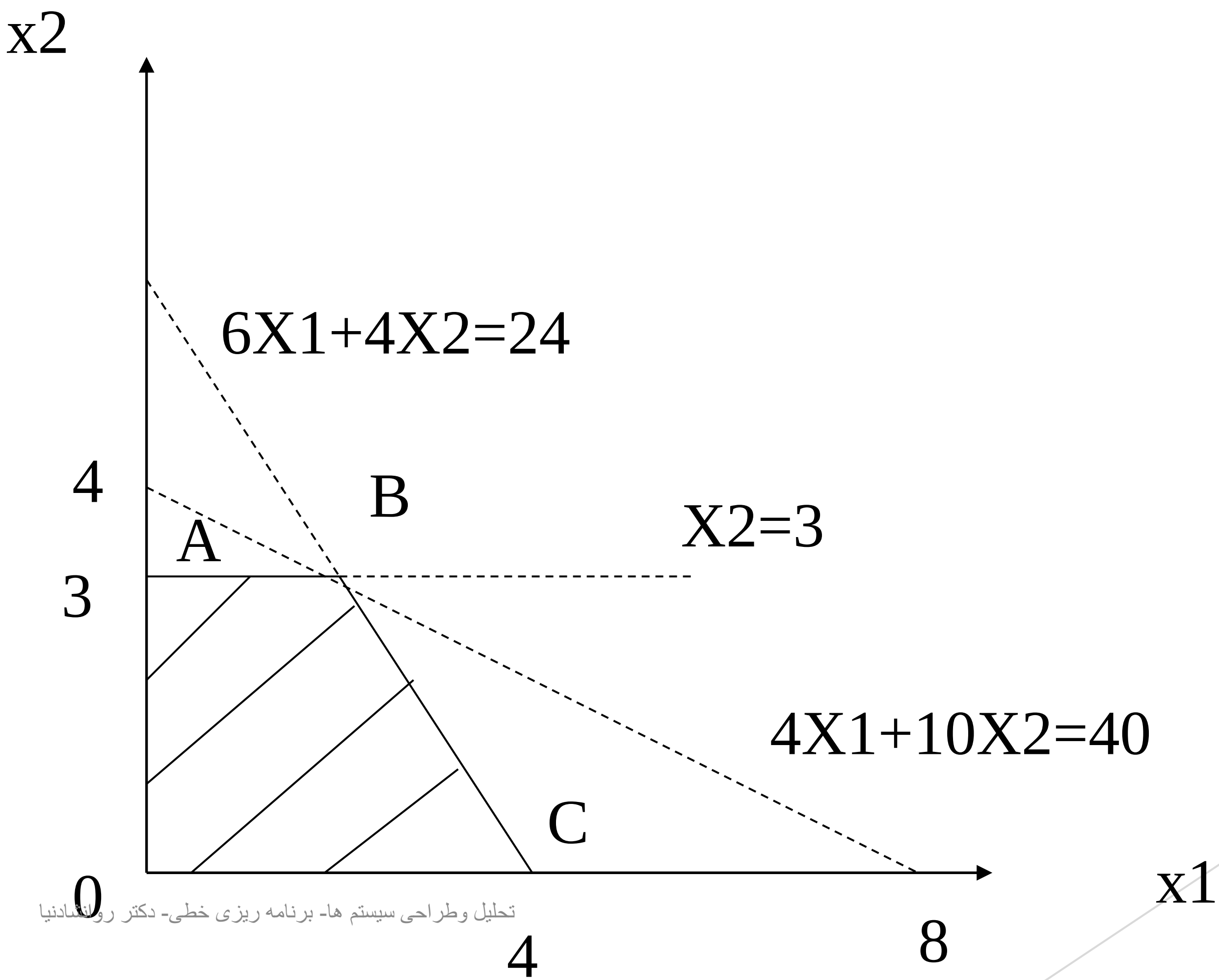
$$6x_1+4x_2\le 24$$

$$x_2\le 3$$

$$5x_1+10x_2\le 40$$

$$x_1,x_2\ge 0$$

رسم مدل



جواب

نقطه B نقطه بهينه است و از طلاقي سه معادله مرزي تشکيل شده است. يکي از معادلات فوق زائدبوده وچنين گوشه اي راتبهگن گويند.

روش سیمپلکس

- یک فن کلي براي حل مسائل برنامه ریزي خطي ریاضی است.
- در این روش ابتدا مدل وارد یک جدول گردیده و سپس یک سري مراحل ریاضي بر روي جدول اجرا مي گردد.
- در روش سیمپلکس همواره از یک گوشه به گوشه اي دیگر (که قطعا بدتر نیست) حرکت کرده تا بهترین گوشه پیدا شود.

فرم استاندارد

اولین قدم در حل یک مدل برنامه ريزي خطي در روش سیمپلکس تبدیل مدل به فرم استاندارد است.

ويژگي هاي فرم استاندارد

تابع هدف حداکثر سازی

محدوديت هابه فرم مساوي

مثال1

$$\text{Max } Z=40X1+50X2$$

S.t

$$X1+2X2\leq 40$$

$$4X1+3X2\leq 120$$

$$X1,X2\geq 0$$

تبدیل محدوديت ها به محدوديت های مساوی با استفاده از متغيرهاي كمكي

- نامعادلات محدوديت ها با استفاده از متغير هاي كمكي به معادلات با علامت مساوي تبديل می شوند.
  - اين متغير هاي كمكي در معادلات با علامت كوچكتر مساوي **متغير كمبود** ناميده می شود.
  - اين متغير هاي كمكي در نامعادلات باعلامت بزرگتر مساوي **متغير مازاد** ناميد ه می شود.

تبدیل نامعادله به معادله

$X1+2X2+S1=40$

$4X1+3X2+S2=120$

$X1,X2,S1,S2 \geq 0$

مثال 2

Min Z= 6X1+3X2

S. to

$2X_1 + 4X_2 \geq 16$

$4X_1 + 3X_2 \geq 22$

$X_1, X_2 \geq 0$

تبديل مدل به فرم استاندارد

- استاندارد سازي تابع هدف

Min Z=Max(-Z)

- استاندارد سازي محدوديت ها
- محدوديت اول$2X1+4X2-S1=16$
- محدوديت دوم $4X1+3X2-S2=22$

متغیر مازاد

برخلاف مثال قبل در اینجا اجبارا باید یک متغیر مازاد از طرف چپ نامعادله کم کنیم متغیر مازاد در اینجا بیانگر منبعي است که بیش از حد اقل لازم مصرف شده است متغیر مازاد نیز باید نامنفي باشد.

خلاصه مدل استاندارد شده

$$Max(-Z) = -6X1-3X2+0S1+0S2$$

S .to:

$$2X1+4X2-S1 = 16$$

$$4X1+ 3X2-S2=2$$

X1,X2,S1,S2

تبديل مدل برنامه ريزي خطي به شكل استاندارد.

الف: مدل حد اكثرسازي

1-محدوديت كوچكتر مساوي را با اضافه كردن متغير كمكي تبديل به مساوي كنيد.

2-محدوديت بزرگتر مساوي را با كم كردن متغير كمكي تبديل به مساوي كنيد.

3-محدوديت مساوي را عينا بنويسيد.

تبديل مدل برنامه ريزي خطي به شكل استاندارد.

ب: مدل حداقل سازي

1 - طرفين تابع هدف را در 1- ضرب نموده و آن را بصورت حد اكثر سازي بنويسيد.

2 - محدوديت كوچكتر مساوي را با اضافه كردن متغير كمكي تبديل به مساوي كنيد.

3- محدوديت بزرگتر مساوي را با كم كردن متغير كمكي تبديل به مساوي كنيد.

4-محدوديت مساوي را عينا بنويسيد.

روش سیمپلکس

مجموعه اي از مراحل رياضي براي حل یک مسئله برنامه ريزي خطي که در یک جدول که به تابلوي سیمپلکس معروف است انجام مي گيرد.

مثال

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

s.t.

$$X_1 + X_2 + S_1 = 40$$

$$4X_1 + 3X_2 + S_2 = 120$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

تابلوي اوليه سيمپلكس

متغیرهای اساسی	Z X1 X2 S1 S2	مقادیر سمت راست

شرح تابلوي سيمپلكس

- ستون اول با عنوان متغير هاي اساسي ناميده ميشود.
- ستون آخر بيانگرمقادير سمت راستمعادلات مدل است.
- ستون وسط بيانگر نام متغير هاي مورد استفاده در مدل است.
- سطر اول تابلو به ضرايب متغير ها در تابع هدف اختصاص دارد. اين سطر را سطر صفر مي گويند.

تابلوي اوليه سيمپلكس

متغیرهای اساسی	Z X1 X2 S1 S2	مقادیر سمت راست
Z0		0
S1		40
S2		120

تابلوي اوليه سيمپلكس بيانگر **مبدا مختصات** مدل برنامه ريزي خطي است .

پر کردن تابلوي سيمپلکس

- تعيين يک جواب موجه اساسي
- جواب موجه اوليه همواره مبدا مختصات است

متغيرهاي اساسي در تابلوي اوليه هستند S_1وS_2

انتقال ضرايب فني به تابلو

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0	1	-40	-50	0	0	0
S1	0	1	2	1	0	40
S2	0	4	3	0	1	120

طریقه نوشتن سطر صفر

تابع هدف را به فرم حد اكثر سازي تبديل كنيد.

مقادير سمت راست تابع هدف را به سمت چپ معادله انتقال دهيد.

مثال

$$Max\ Z = 40X1+50X2+0S1+0S2$$

$$Z-40X1-50X2 = 0$$

متغيرهاي اساسي

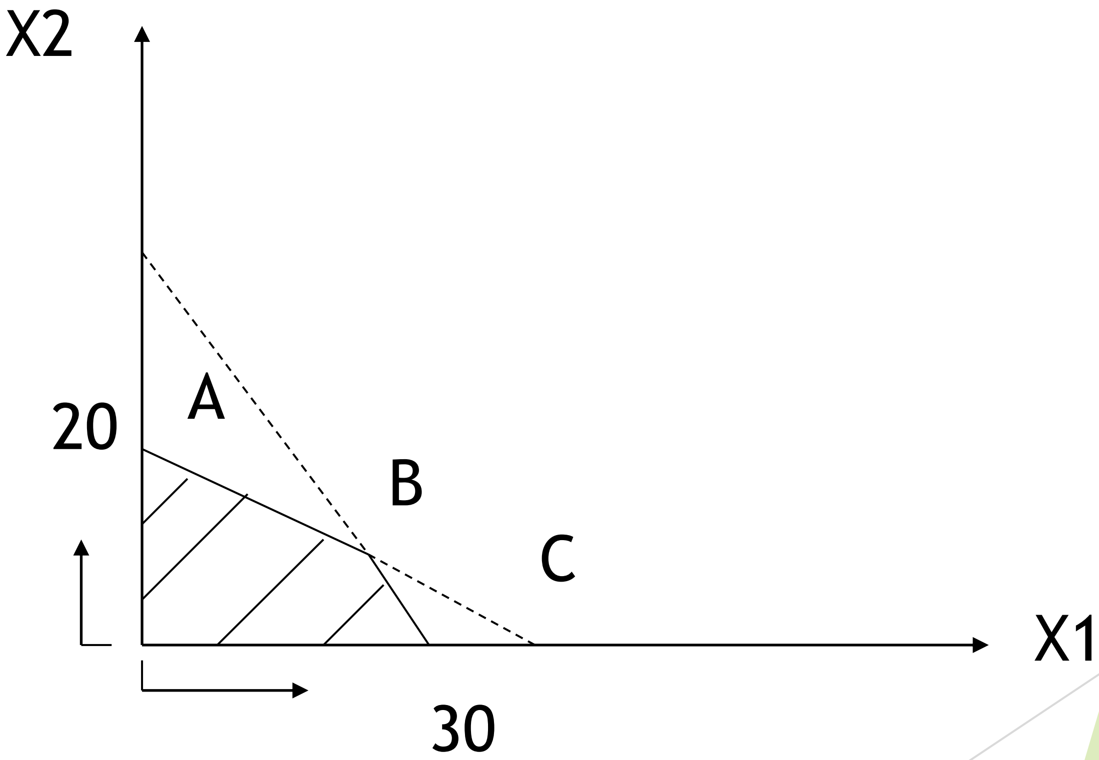
در یک مدل از نوع حداکثر سازي با محدوديت هاي کوچکتر مساوي در تابلوي اول همواره متغيرهاي اساسي (غيرصفر) **متغيرهاي کمکي** بوده و متغيرهاي تصميم (بامقدارصفر) غيراساسي اند .

مراحل سيمپلکس: انتخاب متغير ورودي

ا

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0	1	-40	-50	0	0	0
S1	0	1	2	1	0	40
S2	0	4	3	0	1	120

نمايش هندسي



مراحل سيمپلكس: انتخاب متغير خروجي (سطر لولا)

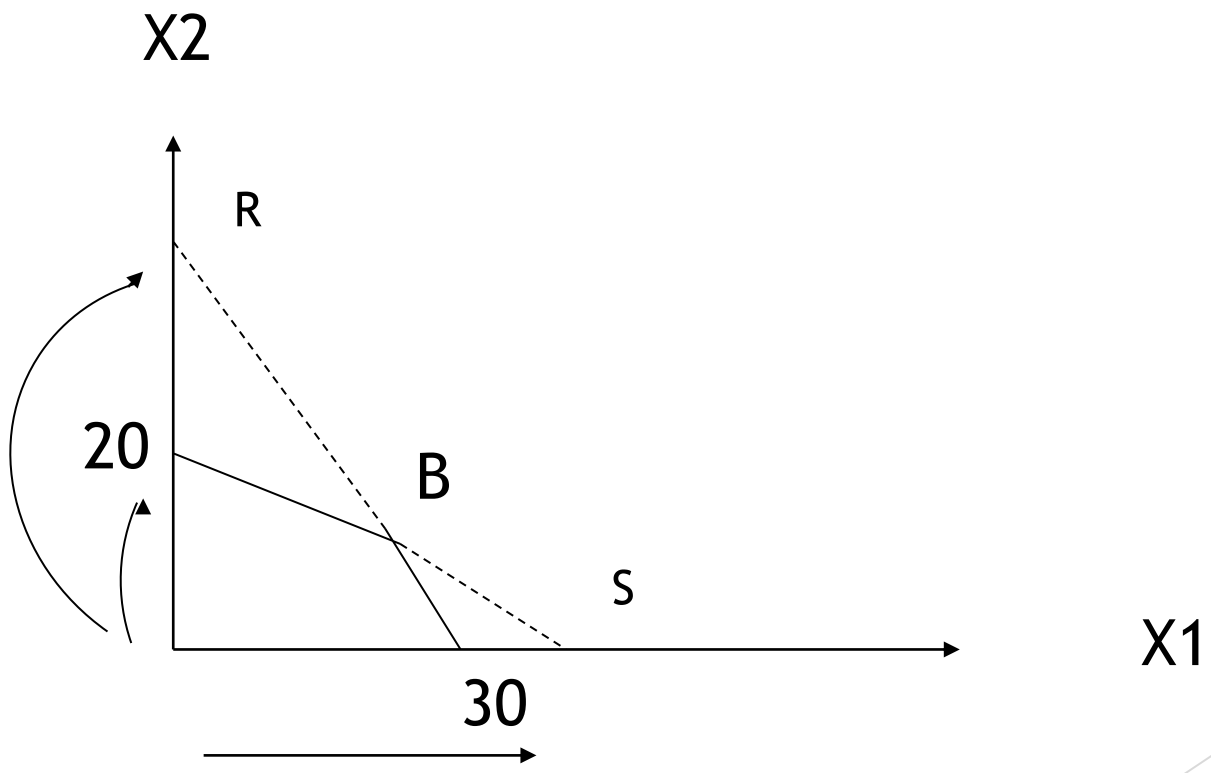
متغيري كه داراي حداقل حاصل تقسيم مقادير سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا باشد در مثال داريم :

$40 \div 2 = 20$

$120 \div 3 = 40$

حداقل عدد بدست آمده، 20 بوده كه متعلق به سطر S_1 است پس S_1 متغير خروجي است. سطر S_1 را سطر لولا گويند.

نمايش هندسي



خلاصه: سطر- ستون وعنصر لولا

متغیرهاي اساسي	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0	1	-40	-50	0	0	0
S1	0	1	2	1	0	40
S2	0	4	3	0	1	120

سطرلولا

ستون لولا

عنصرلولا

مراحل سيمپلكس: تابلوي جديد سيمپلكس

تابلوي دوم سيمپلكس با جواب موجه اساسي

جديد يعني X_2 و S_2 مي باشد

محاسبه سطر جديد لولا

مقاديرسطر لولاي جديد= $\dfrac{\text{مقادير سطر لولاي قديم}}{\text{عدد لولا}}$

تابلوي جديد

متغیرهای اساسی	Z X1 X2 S1 S2	مقادیر سمت راست
Z0 X2 S2	0 ½ 1 ½ 0	20

مقادیر سطر جدید

مقادیر سطر جدید

=

مقادیر مربوط به ردیف *ضریب مربوط در ستون لولا)-(مقادیر سطرقدیم) (لولاي جدید

محاسبه ضرایب S2

ستون	مقادیر ردیف قدیم		ضرب مربوط درستون لولا		مقادیر مربوط به ردیف لولاي جدید		مقادیر ردیف جدید
z	0	-	(3	*	0)	=	0
x1	4	-	(3	*	½)	=	5/2
x2	3	-	(3	*	1)	=	0
s1	0	-	(3	*	½)	=	-3/2
s2	1	-	(3	*	0)	=	1
سمت راست	120	-	(3	*	20)	=	60

محاسبه ضرایب z

ستون	مقادیر ردیف قدیم	-	ضریب مربوط درستون لولا	*	مقادیر مربوط به ردیف لولاي جدید	=	مقادیر ردیف جدید
z	1	-	(-50	*	0)	=	1
x1	-40	-	(-50	*	½)	=	-15
x2	-50	-	(-50	*	1)	=	0
s1	0	-	(-50	*	½)	=	25
s2	0	-	(-50	*	0)	=	0
سمت راست	0	-	(-50	*	20)	=	1000

تابلوي سيمپلكس

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0	1	-15	0	25	0	1000
X2	0	½	1	½	0	20
S2	0	5/2	0	-3/2	1	60

محاسبات تابلوي جديد

تابلوي جديد

-منفي ترين ضريب مربوط به x_1 است.(15 -)

-نحوه تعيين متغيير خروجي:

متغير اساسي		مقادير سمت راست
x_2		$20/ (2/1) = 40$
s_2	متغير خروجي	$60/(2/5) = 24$

سطروستون لولاي جديد

متغيرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادير سمت راست
Z0	1	-15	0	25	0	1000
X2	0	½	1	½	0	20
S2	0	5/2	0	-3/2	1	60

عدد لولا

تابلوي جديد

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0	1	۰	0	16	6	1360
X2	0	0	1	4/5	-1/5	8
x1	0	1	0	-3/5	2/5	24

شرط بهينگي تابلوي سيمپلكس

- كليه مقادير سطر صفر (z)، غير منفي باشند يا كليه مقادير سطر صفر (z) صفر يا عدد مثبت باشند.

رط بهينگي تابلوي سيمپلكس تابلوي سوم تابلوي بهينه است .

خلاصه مراحل روش سیمپلکس

1 - مدل مسئله به فرم استاندارد تبدیل شود .

2 - تابلوي اوليه بر اساس جواب موجه اساسي در مبدا مختصات تنظيم شود .

3 - ستون لولا بر اساس متتقي ترين ضريب سطر صفر تعيين شود.

4 _ سطر لولا بر اساس حداقل حاصل تقسيم مقادير سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا تعيين شود .

5 - ضرايب سطر لولاي جديد محاسبه شود .

6 - ضرايب ديگر سطرها محاسبه شود .

7 - شرط بهينگي كنترل گردد .

نرم افزارهای برنامه ریزی خطی

نرم افزار های تحقیق در عملیات

- LINDO-LINGO
- GAMS
- Optimization toolbox MATLAB

مثال

$$Max\, c = 5x_1 + 4x_2$$

$$st$$

$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$

$$-x_1 + x_2 \le 1$$

$$x_2 \le 2$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

LINDO-LINGO

```
max=5*x1+4*x2;
      6*x1+4*x2<=24;
      x1+2*x2<=6;
      -x1+x2<=1;
      x2<=2;
      x1>=0;
      x2>=0;
end
```

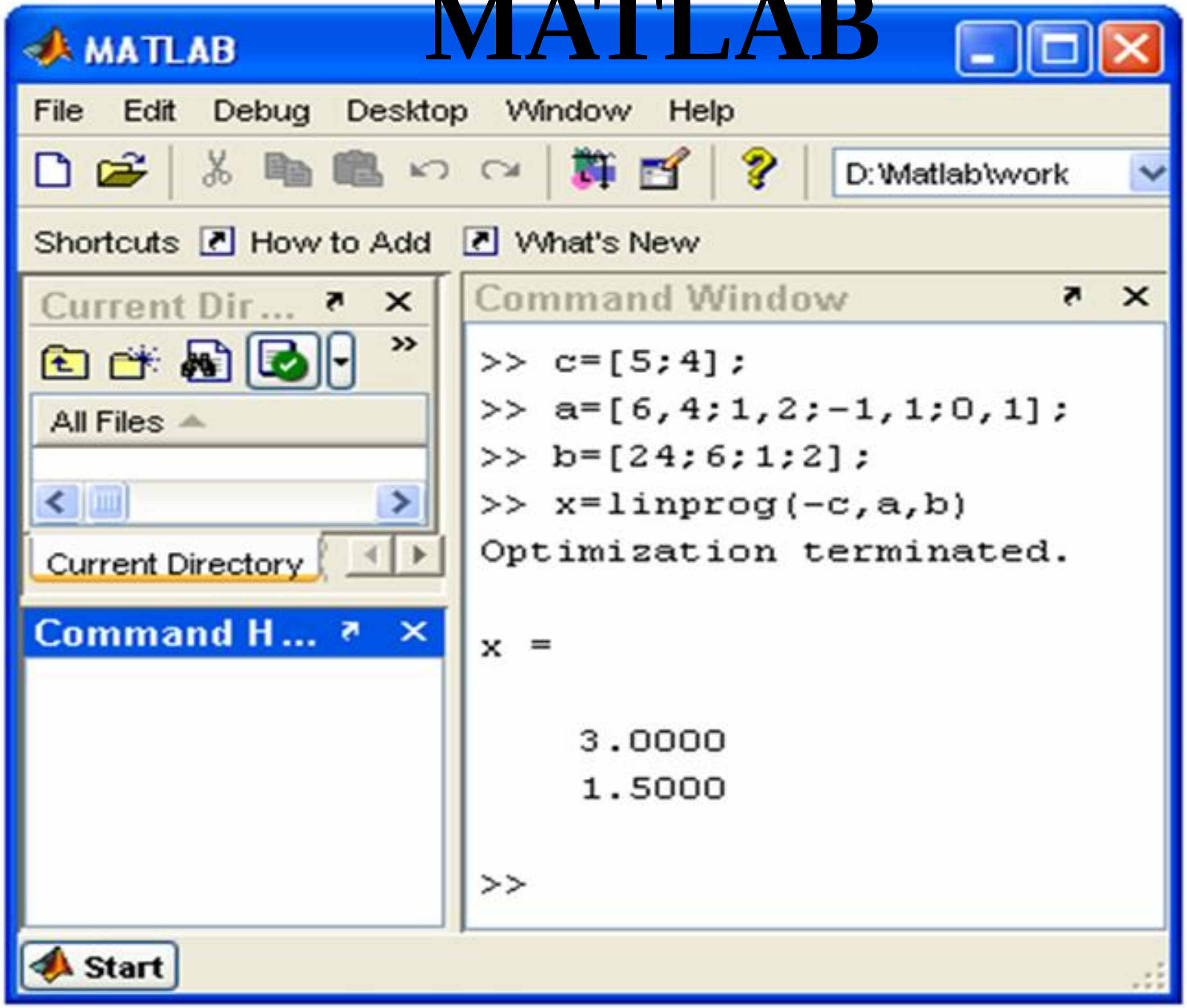
Global optimal solution found.

Objective value: 21.00000

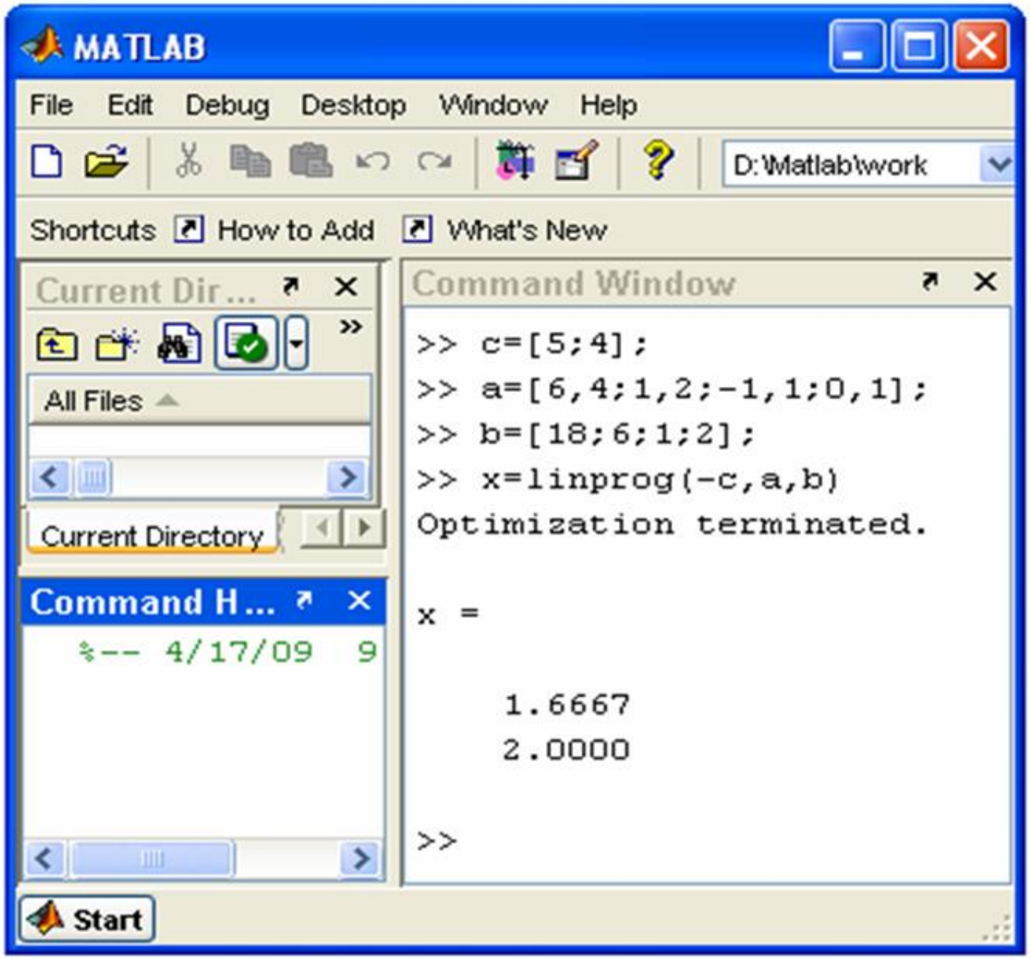
Variable	Value
X1	3.000000
X2	1.500000

Row	Slack or Surplus
1	21.00000
2	0.000000
3	0.000000
4	2.500000
5	0.5000000
6	3.000000
7	1.500000

MATLAB

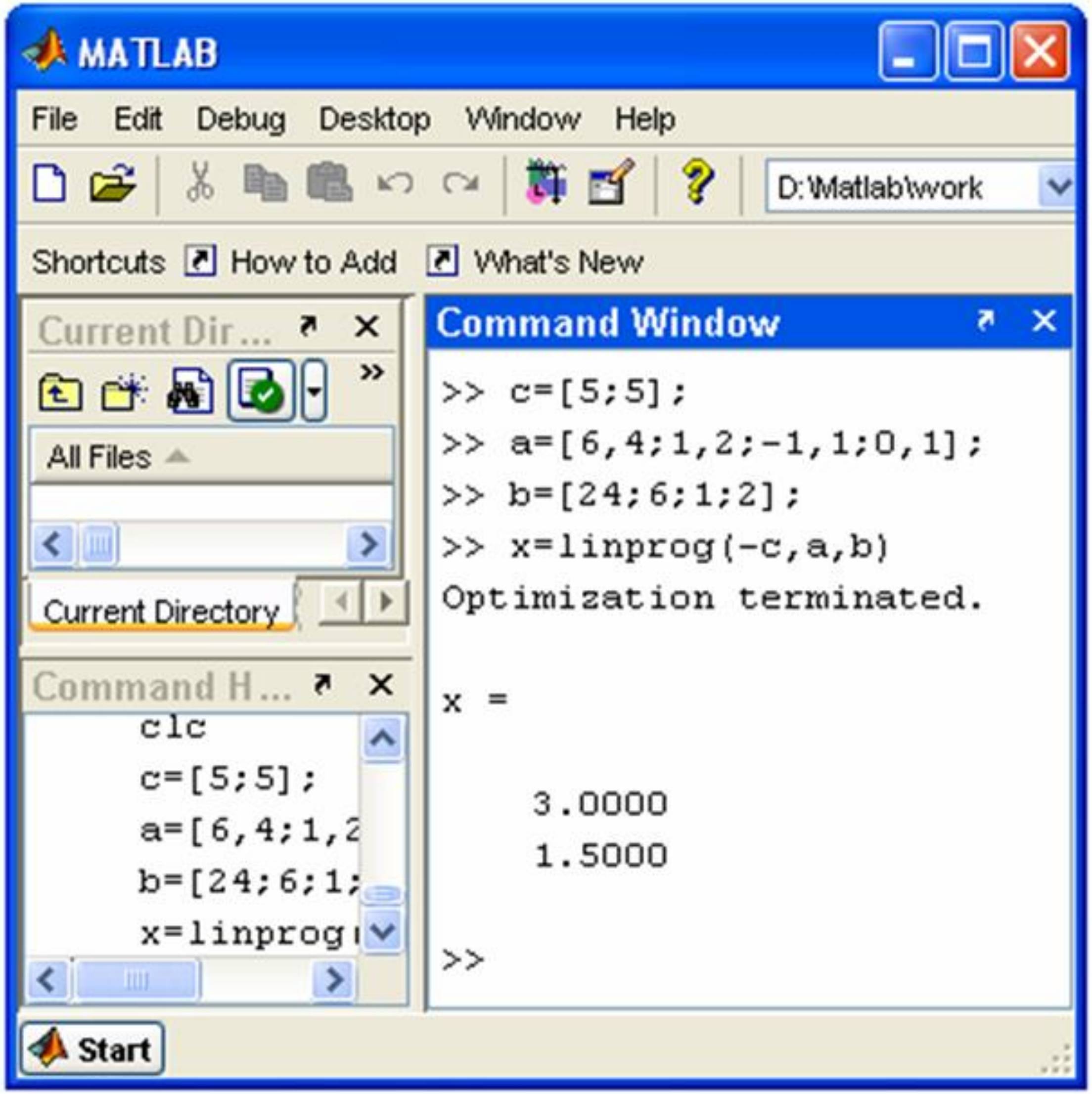


$$Max\, c = 5x_1 + 4x_2 \longrightarrow 5(3) + 4(1.5) = 21$$



در صورتی که مقدار رنگ خارجی موجود در انبار از 24 تن به 18 تن کاهش یابد، در این صورت سود ماکزیمم چقدر است؟

$$Max\,c = 5x_1 + 4x_2 \longrightarrow 5(1.6667) + 4(2) = 16.3335$$



در صورتی که سود هر تن رنگ داخلی از 4 تن به 5 تن افزایش یابد، سود ماکزیمم حاصل چقدر خواهد شد؟

در این صورت سود تغییر نخواهد کرد و همان **21** هزار دلار خواهد ماند !!!

منابع

1- برنامه ریزی خطی، تالیف بازارا و همکاران، ترجمه دکتر اسماعیل خرم، نشر کتاب دانشگاهی

2- برنامه ریزی خطی، تالیف دکتر آریانژاد و دکتر سجادی، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران

3- تحقیق در عملیات جلد 1، تالیف هیلیر و لیبرمن، ترجمه دکتر مدرس و دکتر آصف وزیری، نشر جوان

4- Introduction to Operations Research, H. Lieberman, McGraw Companies.

5- Linear Programming And Network Flows, M.S. Bazaraa, J.J Jarvis, John Wiley & Sons

6- Principles of Mathematics in Operations Research, Levent Kandiller, Springer

7- Operations Research, A.P. Verma, S.K. Kataria & Sons

8- Linear Programming: Foundations and Extensions, R.J. Vanderbei